

現場のための水理学(2)

——一般断面における不等流計算——

中津川 誠 清水康行

2-4 一般断面の不等流計算

一般の河川は、高水敷があったり、河床でも凹凸があったりして、矩形の単断面で表わされるようなものはかなり稀な例といえます。そこで、本節では前節より飛躍して、一般断面の不等流計算法について解説していきたいと思います。

ところで、このように、潤辺に多くの凹凸がある場合でも、用いられる基礎式は先に示した不等流の式と同じような形で、

$$\frac{dH}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{V^2}{2g} \right) + i_e = 0 \quad (2.28)$$

と表わすことができます。ただし、第二項目の α は新しくててきた [エネルギー補正係数] というもので、定義づけが必要です。また、平均流速 V やエネルギー勾配 i_e についても凹凸のある全断面の平均値なので、単断面のように簡単にだすことはできません。

そこで、このような断面を図-2.7 のように小さな矩形のブロックに分けて考えることが有効となります。

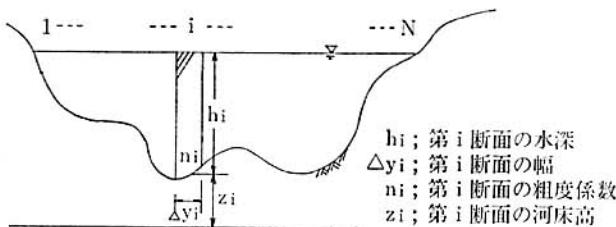


図-2.7 一般断面形

全断面を幅 Δy で N 個の細かいブロックに分割し、第 i ブロックの諸量について考えると、ここでの断面積は、

$$\Delta a_i = h_i \cdot \Delta y_i \quad (2.29)$$

ここで、 h_i ; i ブロックの水深、 Δy_i ; i ブロックの断面幅

また、分担流量は、

$$\Delta q_i = u_i \Delta a_i = u_i h_i \Delta y_i \quad (2.30)$$

となります。

ここで、 u_i は i ブロックにおける平均流速を表わしており、先に示したマニングの公式から算出できます (式 (2.7) 参照)。

$$u_i = \frac{1}{n_i} r_i^{2/3} i_e^{1/2} \quad (2.31)$$

上式の中で、 r_i は i ブロックの径深であり、断面積を潤辺で除して求められますが、図-2.7 で表わされるように、ブロック分けした細かい矩形断面の潤辺は、断面幅 Δy_i に近似できることが一見してわかることから、

$$r_i \doteq \Delta a_i / \Delta y_i = h_i \quad (2.32)$$

となることがわかります。これを式(2.31)に代入すると、

$$u_i = \frac{1}{n_i} h_i^{2/3} i_e^{1/2} \quad (2.33)$$

となります。

なお、 n_i は i ブロックのマニングの粗度係数、 i_e はエネルギー勾配を表わしています。

ゆえに式(2.30)は、

$$\Delta q_i = \left(\frac{1}{n_i} h_i^{2/3} i_e^{1/2} \right) (h_i \Delta y_i) = \left(\frac{1}{n_i} h_i^{5/3} \Delta y_i \right) i_e^{1/2} \quad (2.34)$$

ところで、上式の総和が断面における全流量となることから、

$$Q = \sum_{i=1}^N \Delta q_i = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{n_i} h_i^{5/3} \Delta y_i \right) i_e^{1/2} \quad (2.35)$$

となります。ここで、エネルギー勾配 i_e は、断面のいたるところで近似的に一定とみなせることから、上式より、

$$i_e = \frac{Q^2}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{n_i} h_i^{5/3} \Delta y_i \right)^2} \quad (2.36)$$

と表わすことができます。

また、新たにでてきたエネルギー補正係数 α は、

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^N u_i^2 \Delta a_i}{V^3 A} = \frac{\sum_{i=1}^N u_i^2 \Delta a_i}{(Q^3/A^2)} \quad \dots \dots \dots \quad (2.37)$$

ここで、 u_i ; i ブロック平均流速

Δa_i ; i ブロック断面積

V ; 全断面平均流速 A ; 全断面積

と表わされることがわかつており、これを諸量の定義に従って書き改めると、

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{n_i} h_i^{2/3} i_e^{1/2} \right)^3 h_i \Delta y_i}{\left\{ \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{n_i} h_i^{5/3} \Delta y_i i_e^{1/2} \right)^3 / A^2 \right\}} = \frac{A^2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{n_i^3} h_i^3 \Delta y_i \right)}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{n_i} h_i^{5/3} \Delta y_i \right)^3} \quad \dots \dots \dots \quad (2.38)$$

となります。

ゆえに、式(2.28)は式(2.36), (2.38)などより、

$$\begin{aligned} & \frac{dH}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{V^2}{2g} \right) + i_e \\ &= \frac{dH}{dx} + \frac{1}{2g} \frac{d}{dx} \left[\frac{A^2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{n_i^3} h_i^3 \Delta y_i \right)}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{n_i} h_i^{5/3} \Delta y_i \right)^3} \cdot \frac{Q^2}{A^2} \right] \\ &+ \frac{Q^2}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{n_i} h_i^{5/3} \Delta y_i \right)^2} = \frac{dH}{dx} + \frac{1}{2g} \frac{d}{dx} \\ & \left[\frac{Q^2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{n_i^3} h_i^3 \Delta y_i \right)}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{n_i} h_i^{5/3} \Delta y_i \right)^3} \right] + \frac{Q^2}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{n_i} h_i^{5/3} \Delta y_i \right)^2} = 0 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (2.39)$$

となるわけです。

一見複雑でむづかしそうな式ですが、根底には不等流の基礎式(2.28)があることを念頭において下さい。また式(2.39)が、一般断面における不等流計算の基礎式となるので、しっかりと使えるようにしておきましょう。なお、先にでてきたエネルギー補正係数 α の意味について詳しく知りたい方は、他の水理学解説書を参照して下さい。

それでは、以上で得られた式を使って実際の計算に取組んでみましょう。まず、その前に例によって基礎式(2.39)を差分表示して、計算のできる形に書き換えておきます。ただし、上流側断面を1、下流側断面を2として、各々の諸量に添字としてこれらの番号を付します。

$$\begin{aligned} & \left[H_2 + \frac{Q^2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{n_{2i}^3} h_{2i}^3 \Delta y_{2i} \right)}{2g \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{n_{2i}} h_{2i}^{5/3} \Delta y_{2i} \right)^3} + \frac{\Delta x}{2} \frac{Q^2}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{n_{2i}} h_{2i}^{5/3} \Delta y_{2i} \right)^2} \right] \\ &= \left[H_1 + \frac{Q^2 \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{n_{1i}^3} h_{1i}^3 \Delta y_{1i} \right)}{2g \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{n_{1i}} h_{1i}^{5/3} \Delta y_{1i} \right)^3} - \frac{\Delta x}{2} \frac{Q^2}{\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{n_{1i}} h_{1i}^{5/3} \Delta y_{1i} \right)^2} \right] \end{aligned} \quad \dots \dots \dots \quad (2.40)$$

これで準備は整いました。以後は、各自が演習問題をおして実践力を養って下さい。

(演習問題 4)

図-2.8 に示すように複断面河川において、流量 $Q = 1500 \text{ m}^3/\text{s}$ が流下した場合の水面形および分担流量を求めよ。ただし、低水路幅、低水路の河床高および計算断面の断面間隔は表-2.11 に示されるものとする。また、下流端の低水路の水深は 2.5 m とする。

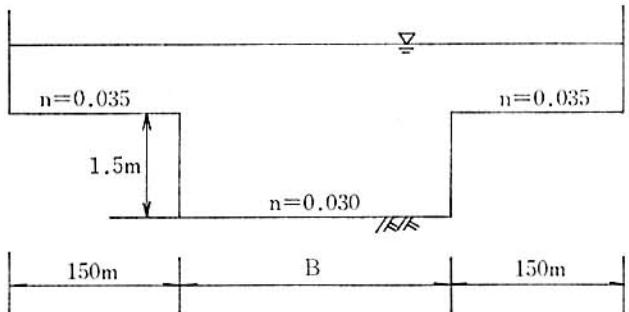


図-2.8 演習問題における断面形

表-2.11 演習問題における河道諸元

断面番号	下流端からの距離 (m)	河床高 (標高) z(m)	河幅 B(m)
1	0	0	300
2	500	0.5	320
3	1000	0.9	280
4	1200	0.8	250
5	1800	2.0	300
6	2100	2.3	300
7	2500	3.0	320
8	3000	3.0	350
9	3300	3.5	300
10	3800	4.0	250

[演習問題4の解答(緩和係数法)]

(1) 考え方

基礎式は式(2.40)であり、これを便宜上、下記のように表わす。

$$H_2 + AA \frac{\varphi(h_2)}{\{\psi(h_2)\}^3} + BB \frac{1}{\{\psi(h_2)\}^2} = H_1 + AA \frac{\varphi(h_1)}{\{\psi(h_1)\}^3} - BB \frac{1}{\{\psi(h_1)\}^2} \quad \dots \dots \dots \textcircled{1}$$

ただし、

$$AA = Q^2/2g \quad \dots \dots \dots \textcircled{2}$$

$$BB = \frac{Q^2 \Delta x}{2} \quad \dots \dots \dots \textcircled{3}$$

$$\varphi(h) = \sum_{i=1}^N \frac{h_{(i)}^3}{n_{(i)}^2} \Delta y_{(i)} \quad \dots \dots \dots \textcircled{4}$$

$$\psi(h) = \sum_{i=1}^N \frac{h_{(i)}^{5/3}}{n_{(i)}} \Delta y_{(i)} \quad \dots \dots \dots \textcircled{5}$$

常流なので、下流から上流に向かって計算を行う。すなわち、下流側水深 h_2 を既知とし、①式を満たすような上流側水深 h_1 を求めればよい。今、①式の左辺を F_2 、右辺を F_1 とおくことになると、 $F_2 = F_1$ を満たすような h_1 を求めればよいことになる。

解答では、緩和係数法による解法を示す。

緩和係数法とは、 $F = F_2 - F_1$ として、 $|F| < \epsilon$ (打切り誤差) となるような h_1 を求める方法の1つであるが、その手順を以下に示す。

- i) h_1 になんらかの仮定値を代入し、 $F = F_2 - F_1$ の F を計算 (F_2 は①式の左辺、 F_1 は①式の右辺)。
- ii) $|F| > \epsilon$ のとき、 $h_1 = h_1 + \beta F$ によって h_1 を更新する。このときの β を緩和係数と称し、 $0.1 \leq \beta \leq 1.5$ くらいの値をとる。
- iii) 更新した h_1 をもって F を計算する。
- iv) $|F| < \epsilon$ となるまで上記の手順を繰返す。

緩和係数法は更新時の計算式が簡単なので、1回当たりの計算は短くなるという利点はあるが、 β に適当な値を与えない場合、繰返し回数が増え、かえって時間がかかる場合もあるので注意を要する。なお、経験上 β は0.8程度がよいようである。

(2) 実際の計算

(1)で示した考え方をもとに、以下に1断面を例に計算の過程を示す。

- i) 流量 $Q = 1500 \text{ m}^3/\text{s}$ 、重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 、下流側水深 (左岸高水敷 $h_2(1) = 1.0 \text{ m}$)、低水路 $h_2(2)$

= 2.5 m、右岸高水敷 $h_2(3) = 1.0 \text{ m}$ 、粗度係数 (左岸高水敷 $n(1) = 0.035$ 、低水路 $n(2) = 0.03$ 、右岸高水敷 $n(3) = 0.035$)、下流側川幅 (左岸高水敷 $B_2(1) = 150 \text{ m}$ 、低水路 $B_2(2) = 300 \text{ m}$ 、右岸高水敷 $B_2(3) = 150 \text{ m}$)、上流側川幅 (左右岸高水敷 $B_1(1), B_1(3)$ は $B_2(1), B_2(3)$ と同じ、低水路 $B_1(2) = 320 \text{ m}$)、下流側河床高 $z_2 = 0 \text{ m}$ 、上流側河床高 $z_1 = 0.5 \text{ m}$ (河床高は低水路のもの)、断面間距離 $\Delta x = 500 \text{ m}$ といった諸条件設定。

- ii) 上流側水深を以下のように仮定する。

左岸高水敷 $h_1(1) = h_2(1) = 1.0$

低水路 $h_1(2) = h_2(2) = 2.5$

右岸高水敷 $h_1(3) = h_2(3) = 1.0$

- iii) F_2 の計算を行う (①式の左辺)。

$$\textcircled{4} \text{ 式より } \varphi(h_2) = \sum_{i=1}^3 \frac{\{h_2(i)\}^3}{\{n_2(i)\}^2} B_2(i) = 0.1806 \times 10^9$$

$$\textcircled{5} \text{ 式より } \psi(h_2) = \sum_{i=1}^3 \frac{\{h_2(i)\}^{5/3}}{n_2(i)} B_2(i) = 0.5462 \times 10^5$$

$$F_2 = H_2 + \frac{Q^2}{2g} \frac{\varphi(h_2)}{\{\psi(h_2)\}^3} + \frac{Q^2 \Delta x}{2} \cdot \frac{1}{\{\psi(h_2)\}^2} = 2.816$$

ただし、 H_2 は下流側の水位であり $H_2 = h_2(2) + z_2$ 、 z_2 は低水路の河床高。

- iv) 下流側断面の分担流量 $\Delta q_2(1) \sim \Delta q_2(3)$ を計算。

i 測線の分担流量 $\Delta q_{(i)}$ は式(2.34)より、

$$\Delta q_{(i)} = \frac{1}{n_{(i)}} \Delta y_{(i)} h_{(i)}^{5/3} i_e^{1/2}$$

エネルギー勾配 i_e は式(2.36)より計算できる。

したがって、

$$\Delta q_2(1) = 117.692 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Delta q_2(2) = 1264.620 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\Delta q_2(3) = 117.692 \text{ m}^3/\text{s}$$

- v) $h_1(1) \sim h_1(3)$ の仮定値をもとに F_1 の計算を行なう (①式の右辺)。

$$\textcircled{4} \text{ 式より } \varphi(h_1) = 0.1922 \times 10^9$$

$$\textcircled{5} \text{ 式より } \psi(h_1) = 0.5769 \times 10^5$$

$$F_1 = H_1 + \frac{Q^2}{2g} \frac{\varphi(h_1)}{\{\psi(h_1)\}^3} - \frac{Q^2 \Delta x}{2} \cdot \frac{1}{\{\psi(h_1)\}^2} = 2.946$$

ただし、 H_1 は上流側の水位であり $H_1 = h_1(2) + z_1$ 、 z_1 は低水路の河床高。

- vi) F の計算

$$F = F_2 - F_1 = 2.816 - 2.946 = -0.130$$

- vii) 打切り誤差を $\epsilon = 0.0001$ とし、 $|F| > \epsilon$ ならば、水

深を以下のように更新。なお、緩和係数 β は 0.7 とした。

$$\text{左岸高水敷 } h_1(1) = h_1(1) + \beta F = 1.0 + 0.7 \times (-0.130) = 0.909$$

$$\text{低水路 } h_1(2) = h_1(2) + \beta F = 2.5 + 0.7 \times (-0.130) = 2.409$$

$$\text{右岸高水敷 } h_1(3) = h_1(3) + \beta F = 1.0 + 0.7 \times (-0.130) = 0.909$$

viii) vii) の更新値 $h_1(1) \sim h_1(3)$ をもって F_1 を計算し、 F を求める。

ix) $|F| < \epsilon$ となるまで vii), viii) に示すような手順を繰返す。 $|F| < \epsilon$ となったときの $h_1(1) \sim h_1(3)$ が正解である。

この正解値は、

$$\text{左岸高水敷 } h_1(1) = 0.888 \text{ m}$$

$$\text{低水路 } h_1(2) = 2.388 \text{ m}$$

$$\text{右岸高水敷 } h_1(3) = 0.888 \text{ m}$$

さらに、これらをもって iv) のように分担流量を

求めると、

$$\text{左岸高水敷 } \Delta q_1(1) = 100 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{低水路 } \Delta q_1(2) = 1299 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{右岸高水敷 } \Delta q_1(3) = 100 \text{ m}^3/\text{s}$$

なお、収束にいたるまでの計算の経緯を表-2.12 に示す。

(3) 計算機プログラムの概要

後述の補遺 [4] 参照。

(4) 計算結果

結果を表-2.13 および表-2.14 に示す。表中の H は水位、 H_1 が右岸高水敷水深、 H_2 が低水路水深、 H_3 が左岸高水敷水深、また、 Q_1 が右岸高水敷分担流量、 Q_2 が低水路分担流量、 Q_3 が左岸高水敷分担流量を表わすものである。

以上、解答作成者 渡辺和好

表-2.12 計算の経緯

$\epsilon = 0.0001$

回数	左岸高水敷 $h_1(1)$	低水路 $h_1(2)$	右岸高水敷 $h_1(3)$	誤差 F	判定
1	1.000	2.500	1.000	-0.13013	$ F > \epsilon$
2	0.909	2.409	0.909	-0.02476	$ F > \epsilon$
3	0.892	2.392	0.892	-0.00433	$ F > \epsilon$
4	0.889	2.389	0.889	-0.00073	$ F > \epsilon$
5	0.888	2.388	0.888	-0.00013	$ F > \epsilon$
6	0.888	2.388	0.888	-0.00002	$ F < \epsilon$

表-2.13 計算結果（水位、水深）

No.	水位 H (m)	右岸高水敷水深 H_1 (m)	低水路水深 H_2 (m)	左岸高水敷水深 H_3 (m)	収束回数 NN (回)	誤差 F
1	2.500	1.000	2.500	1.000	0	0.00000
2	2.888	0.888	2.388	0.888	6	-0.00002
3	3.311	0.911	2.411	0.911	4	0.00008
4	3.510	1.210	2.710	1.210	9	0.00004
5	4.104	0.604	2.104	0.604	5	0.00009
6	4.550	0.750	2.250	0.750	7	0.00003
7	5.053	0.553	2.053	0.553	5	-0.00003
8	5.668	1.168	2.668	1.168	7	0.00009
9	5.812	0.812	2.312	0.812	8	-0.00003
10	6.358	0.858	2.358	0.858	4	0.00002

表-2.14 計算結果(分担流量)

No.	右岸高水敷 流 Q_1 (m ³ /s)	低水路流量 Q_2 (m ³ /s)	左岸高水敷 流 Q_3 (m ³ /s)
1	117.692	1264.620	117.692
2	100.374	1299.250	100.374
3	115.154	1269.690	115.154
4	158.612	1182.780	158.612
5	72.562	1354.880	72.562
6	90.555	1318.890	90.555
7	62.124	1375.750	62.124
8	117.302	1265.400	117.302
9	97.782	1304.440	97.782
10	120.171	1259.660	120.171

〔演習問題4の解答(ニュートン法)〕

(1) 考え方

基礎式は式(2.40)であるが、便宜上これを水位の関数で表わすこととする。すなわち、水深 h は $h_i = H - z_i$ として表わし、

$$\begin{aligned} & H_2 + \frac{Q^2}{2g} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\{H_2 - z_2(i)\}^3}{n(i)^3} \Delta y_2(i)}{\left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\{H_2 - z_2(i)\}^{5/3}}{n(i)} \Delta y_2(i) \right\}^3} \\ & + \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{Q^2}{\left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\{H_2 - z_2(i)\}^{5/3}}{n(i)} \Delta y_2(i) \right\}^2} \\ & = H_1 + \frac{Q^2}{2g} \cdot \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\{H_1 - z_1(i)\}^3}{n(i)^3} \Delta y_1(i)}{\left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\{H_1 - z_1(i)\}^{5/3}}{n(i)} \Delta y_1(i) \right\}^3} \\ & - \frac{\Delta x}{2} \cdot \frac{Q^2}{\left\{ \sum_{i=1}^N \frac{\{H_1 - z_1(i)\}^{5/3}}{n(i)} \Delta y_1(i) \right\}^2} \end{aligned} \quad \text{①}$$

常流なので、下流側水位 H_2 が既知で、上流側水位 H_1 について解く。①式を書き換めると次式が得られる。

$$f(H_1) = H_1 + AA \frac{\varphi(H_1)}{\{\psi(H_1)\}^3} - BB \frac{1}{\{\psi(H_1)\}^2} - CC \quad \text{②}$$

ただし、

$$\varphi(H) = \sum_{i=1}^N \frac{\{H - z(i)\}^3}{n(i)^3} \Delta y(i) \quad \text{③}$$

$$\psi(H) = \sum_{i=1}^N \frac{\{H - z(i)\}^{5/3}}{n(i)} \Delta y(i) \quad \text{④}$$

$$AA = Q^2/2g \quad \text{⑤}$$

$$BB = \Delta x \cdot Q^2/2 \quad \text{⑥}$$

$$CC = H_2 + AA \frac{\varphi(H_2)}{\{\psi(H_2)\}^3} + BB \frac{1}{\{\psi(H_2)\}^2} \quad \text{⑦}$$

解答2では、ニュートン法による解法を示す。

ニュートン法の手法については、前掲の演習問題で解説してあるので参照されたいが、本問の場合、①式の左辺と右辺を等しくする。すなわち、②式の $f(H_1)$ を0とするような H_1 を求めるための手順は、方法としてはまったく同様であるが、計算が多少複雑になっている。

以下に手順を示す。

- i) ②式の H_1 になんらかの仮定値を代入する。ここでは、 $H_1 = H_2 + (z_1 - z_2)$ として与える方がより真値に近いであろう。
- ii) $f(H_1) > \varepsilon$ (打ち切り誤差) のとき、 $H_1 + \Delta H_1$ なる更新を行う。ここで ΔH_1 は、

$$f(H_1 + \Delta H_1) \approx f(H_1) + f'(H_1) \cdot \Delta H_1 = 0 \text{ より,}$$

$$\Delta H_1 = -f(H_1)/f'(H_1) \quad \text{⑧}$$

ここで、 $f(H_1)$, $f'(H_1)$ は、

$$f(H_1) = H_1 + AA \frac{\varphi(H_1)}{\{\psi(H_1)\}^3} - BB \frac{1}{\{\psi(H_1)\}^2} - CC \quad \text{⑨}$$

$$\begin{aligned} f'(H_1) &= 1 + AA \left[\frac{\varphi'(H_1)}{\{\psi(H_1)\}^3} + \varphi(H_1) \left\{ \frac{1}{\{\psi(H_1)\}^3} \right\} \right] \\ &\quad - BB \left[\frac{1}{\{\psi(H_1)\}^2} \right] \end{aligned} \quad \text{⑩}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \varphi'(H) &= 3 \sum_{i=1}^N \frac{\{H - z(i)\}^2}{n(i)^3} \Delta y(i) [H - z(i)]' \\ &= 3 \sum_{i=1}^N \frac{\{H - z(i)\}^2}{n(i)^3} \Delta y(i) \end{aligned} \quad \text{⑪}$$

$$\begin{aligned} \psi'(H) &= \frac{5}{3} \sum_{i=1}^N \frac{\{H - z(i)\}^{2/3}}{n(i)} \Delta y(i) [H - z(i)]' \\ &= \frac{5}{3} \sum_{i=1}^N \frac{\{H - z(i)\}^{2/3}}{n(i)} \Delta y(i) \end{aligned} \quad \text{⑫}$$

$$\left[\frac{1}{\{\psi(H_1)\}^3} \right]' = [\{\psi(H_1)\}^{-3}]' = -3\{\psi(H_1)\}^{-4} \cdot \psi'(H_1) \quad \text{⑬}$$

$$\left[\frac{1}{\{\psi(H_1)\}^2} \right]' = [\{\psi(H_1)\}^{-2}]' = -2\{\psi(H_1)\}^{-3} \cdot \psi'(H_1) \quad \text{⑭}$$

- iii) ii) で更新した H_1 をもって、再度 $f(H_1)$ の計算を行う。
- iv) $f(H_1)$ が十分零に近づくまで、すなわち $|f(H_1)| < \varepsilon$ となるまで ii), iii) の手順を繰返す。

(2) 実際の計算

- i) 諸条件設定、解答1の(2)のi)と同一、打切り誤差 ϵ は0.001
- ii) ②式の定数AA, BBの計算(⑤式, ⑥式)

$$AA = \frac{Q^2}{2g} = \frac{1500^2}{2 \times 9.8} = 114796$$

$$BB = \frac{Ax Q^2}{2} = \frac{500 \times 1500^2}{2} = 5.625 \times 10^8$$

- iii) ②式の定数CCの計算

③式より、

$$\begin{aligned}\varphi(H_2) &= \sum_{i=1}^3 \frac{(H_2 - z_2(i))^{5/3}}{n(i)^3} \Delta y(i) = \frac{1.0^3 \times 150}{0.035^3} \\ &\quad + \frac{2.5^3 \times 300}{0.030^3} + \frac{1.0^3 \times 150}{0.035^3} = 1.806 \times 10^8\end{aligned}$$

④式より、

$$\begin{aligned}\varphi(H_2) &= \sum_{i=1}^3 \frac{(H_2 - z_2(i))^{5/3}}{n(i)} \Delta y(i) = \frac{1.0^{5/3} \times 150}{0.035} \\ &\quad \times 2 + \frac{2.5^{5/3} \times 300}{0.030} = 54622\end{aligned}$$

⑦式より、

$$\begin{aligned}CC &= H_2 + AA \frac{\varphi(H_2)}{\{\varphi(H_2)\}^3} + BB \frac{1}{\{\varphi(H_2)\}^2} \\ &= 2.5 + 114796 \times \frac{1.806 \times 10^8}{54622^3} \\ &\quad + 5.625 \times 10^8 \times \frac{1}{54622^2} = 2.816\end{aligned}$$

- iii) 上流側水位 H_1 仮定。上流側水深 h_1 と下流側水深 h_2 が等しいとした仮定値を初期値とする。すなわち $h_1=h_2$ より、

$$H_1 - z_1 = H_2 - z_2$$

よって、 $H_1 = H_2 + (z_1 - z_2) = 2.5 + (0.5 - 0) = 3.0$

- iv) ②式の $f(H_1)$ 計算

⑧式より、

$$\begin{aligned}\varphi(H_1) &= \sum_{i=1}^3 \frac{(H_1 - z_1(i))^3}{n_1(i)} \Delta y(i) = \frac{1.0^3 \times 150}{0.035^3} \\ &\quad \times 2 + \frac{2.5^3 \times 320}{0.030^3} = 1.922 \times 10^8\end{aligned}$$

⑨式より、

$$\begin{aligned}\psi(H_1) &= \sum_{i=1}^3 \frac{(H_1 - z_1(i))^{5/3}}{n_1(i)} \Delta y(i) = \frac{1.0^{5/3} \times 150}{0.035} \\ &\quad \times 2 + \frac{2.5^3 \times 320}{0.030} = 57692\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(H_1) &= H_1 + AA \frac{\varphi(H_1)}{\{\varphi(H_1)\}^3} - BB \frac{1}{\{\varphi(H_1)\}^2} - CC \\ &= 3.0 + 114796 \times \frac{1.922 \times 10^8}{57692^3} - 5.625 \\ &\quad \times 10^8 \times \frac{1}{57692^2} - 2.816 = 0.130\end{aligned}$$

- v) $|f(H_1)| = 0.130 > \epsilon = 0.001$ なので、 H_1 を更新する。
すなわち、更新量 ΔH_1 は $\Delta H_1 = -f(H_1)/f'(H_1)$ より、以下の手順で算出する。

⑩式より、

$$\left[\frac{1}{\{\varphi(H_1)\}^3} \right]' = -3 \{\varphi(H_1)\}^{-4} \cdot \varphi'(H_1) = -1.274 \times 10^{-14}$$

⑪式より、

$$\left[\frac{1}{\{\varphi(H_1)\}^2} \right]' = -2 \{\varphi(H_1)\}^{-3} \cdot \varphi'(H_1) = -4.899 \times 10^{-10}$$

⑫式より、

$$\varphi'(H_1) = 2.432 \times 10^8$$

よって ⑩式より

$$\begin{aligned}f'(H_1) &= 1 + AA \left[\frac{\varphi'(H_1)}{\{\varphi(H_1)\}^3} + \varphi(H_1) \left\{ \frac{1}{\{\varphi(H_1)\}^3} \right\}' \right] \\ &\quad - BB \left[\frac{1}{\{\varphi(H_1)\}^2} \right]' = 1 + 114796 \left\{ \frac{2.432 \times 10^8}{57692^3} \right. \\ &\quad \left. + 1.922 \times 10^8 \times (-1.274 \times 10^{-14}) \right\} \\ &\quad - (5.625 \times 10^8) \times (-4.899 \times 10^{-10}) = 1.140\end{aligned}$$

$$\Delta H_1 = -f(H_1)/f'(H_1) = -0.130 / 1.140 = -0.114$$

- vi) H_1 を更新

$$H_1 = H_1 + \Delta H_1 = 3.0 - 0.114 = 2.886$$

- vii) H_1 の更新値をもって再度 $f(H_1)$ を計算。 $|f(H_1)| < \epsilon$ となるまでiv)~vi)を繰返す。
 $|f(H_1)| < \epsilon$ となったときの H_1 が正解。なお、収束までの計算の経緯を表-2.15に示す。

表-2.15 計算の経緯

回数	H_1	$f(H_1)$	判定
0	水位 = 2.886	$f(H_1) = 0.130134$	$ f(H_1) > \epsilon$
1	水位 = 2.888	$f(H_1) = -0.002460$	$ f(H_1) > \epsilon$
2	水位 = 2.888	$f(H_1) = -0.000001$	$ f(H_1) < \epsilon$

表-2.16 計 算 結 果

断面 No.	水 位	左 岸 流 量	低 水 路 流 量	右 岸 流 量	繰返し回数
1	2.500	117.7	1264.6	117.7	0
2	2.888	100.4	1299.3	100.4	3
3	3.311	115.1	1269.7	115.1	2
4	3.510	158.7	1182.7	158.7	2
5	4.104	72.6	1354.9	72.6	4
6	4.550	90.6	1318.9	90.6	3
7	5.053	62.1	1375.8	62.1	3
8	5.668	117.3	1265.5	117.3	3
9	5.812	97.8	1304.4	97.8	3
10	6.358	120.1	1259.8	120.1	2

(3) 計算機プログラム概要

後述の補遺 [5] 参照。

(4) 計 算 結 果

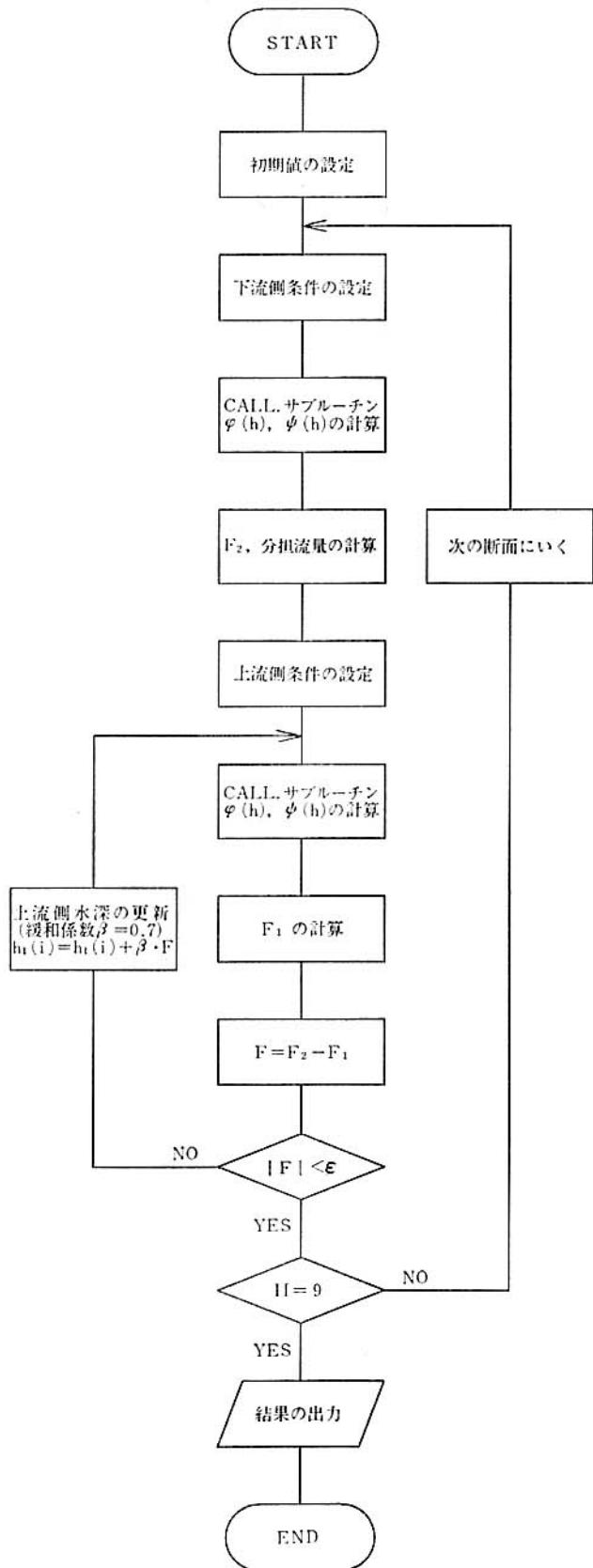
計算結果を表-2.16 に示す。

以上、解答作成者 本間 隆

補遺 計算プログラム概要

[4] 演習問題4 (緩和係数法)

(1) プログラムのフローチャート



(2) プログラムの解説

文番号	解説
40, 50	初期値の設定. $H(i)$: 水深, Q : 流量, $n(i)$: 粗度, G : 重力加速度.
60~80	$s(i)$, $z(i)$, $B2(i)$ の読み込み. $s(i)$: 断面間距離, $z(i)$: 河床高, $B2(i)$: 低水路幅.
120~140	上流側水深の設定.
150, 160	下流側水深, 低水路幅の設定.
170	サブルーチンへいく.
190	$F2$ (下流側) の計算.
200, 210	分担流量の計算. $Q1(i)$: $Q3(i)$: 高水敷流量, $Q2(i)$: 低水路流量.
220	上流側の条件設定.
230	サブルーチンへいく.
250	$F1$ (上流側) の計算.
290	収束の判断, 収束したならば 330 へいく. $F(i)$: 誤差.
310	上流側水深の再設定 230 へいく.
330	下流側水深の再設定.
340	分担流量の計算.
370~450	計算結果の出力. No.: 断面 No., H : 水位, $H1 \sim H3$: 水深, NN : 繰返し回数, F : 誤差. データ.
460~480	サブルーチン ④式の $\varphi(h)$, ⑤式の $\psi(h)$ を計算.
510~550	$\varphi(h)$ は PHI, $\psi(h)$ は GAM に相当.

注) 使用する変数の説明.

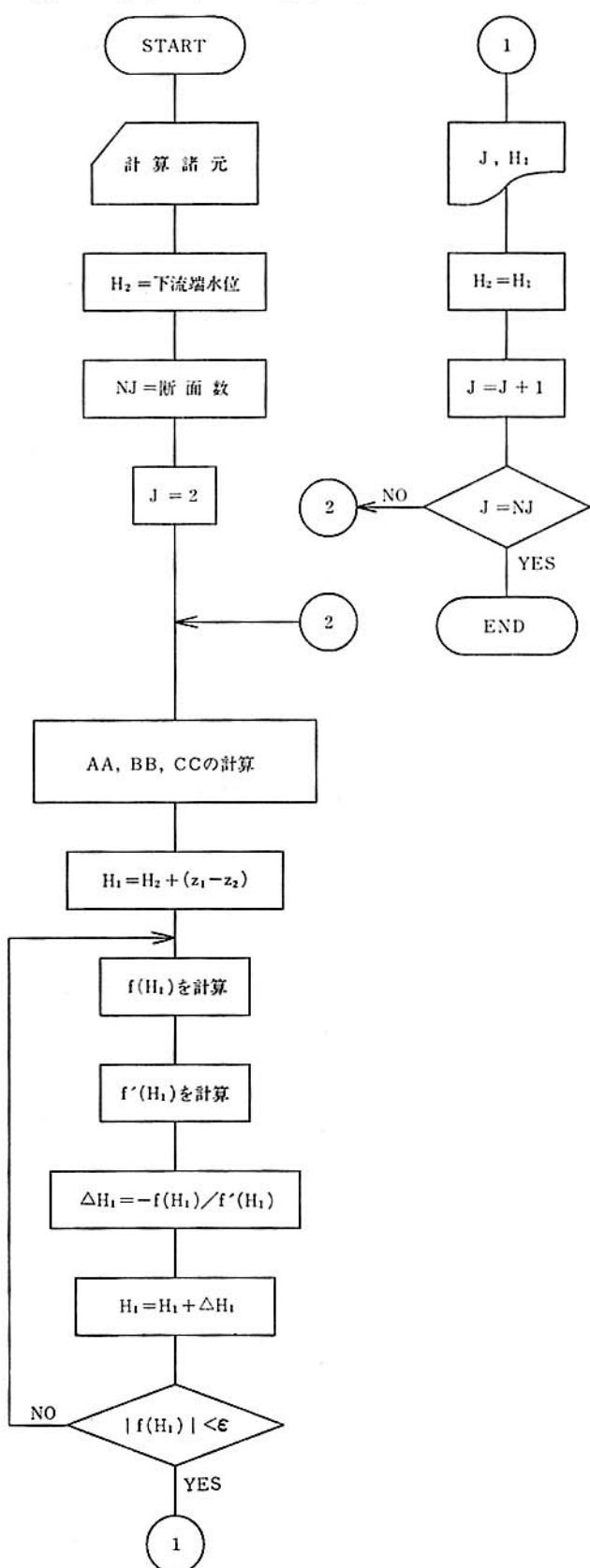
$s(i)$: i 断面と $(i+1)$ 断面間の距離.
 $z(i)$: i 断面の低水路河床高.
 $B(i)$: i 断面における低水路, 高水敷分担流量計算用変数.
 $B2(i)$: i 断面の低水路幅.
 $H1(i)$, $H3(i)$: i 断面の高水敷水深.
 $H2(i)$: i 断面の低水路水深.
 $H(i)$: i 断面における低水路, 高水敷の水深計算用変数.
 $HH(i)$: i 断面の水位.
 $N(1)$, $N(3)$: 高水敷粗度.
 $N(2)$: 低水路粗度.
 $NN(i)$: i 断面の計算繰返し回数.
 $F(i)$: i 断面の収束誤差.
 $Q1(i)$, $Q3(i)$: i 断面の高水敷流量.
 $Q2(i)$: i 断面低水路流量.
 $QQ(i)$: i 断面の分担流量計算用変数.

(3) プログラムのリスト

```
10 'SAVE "13:FUKU"
20 'FUTORYU KEISAN PROGRAM
30 DIM S(10),Z(10),B(5),B2(10),H1(10),H2(10),H3(10),H(5),HH(10),
   NN(10),NN(10),F(10),Q1(10),Q2(10),Q3(10),QQ(5)
40 H1(1)=1!:H2(1)=2.5:H3(1)=1!
50 Q=1500:N(1)=.035:N(2)=.03:N(3)=.035:G=9.8:B(1)=150:B(3)=150
60 FOR I=1 TO 9:READ S(I):NEXT I
70 FOR I=1 TO 10:READ Z(I):NEXT I
80 FOR I=1 TO 10:READ B2(I):NEXT I
90 NN(1)=0
100 FOR II=1 TO 9
110 I=II
120 H1(I+1)=H1(I)
130 H2(I+1)=H2(I)
140 H3(I+1)=H3(I)
150 H(1)=H1(I):H(2)=H2(I):H(3)=H3(I)
160 B(2)=B2(I)
170 GOSUB 500
180 LPRINT USING "PHI= .#####^### GAM= .#####^###";PHI;GAM
190 F1=H2(I)+Z(I)+Q^2/(2*G)*PHI/GAM^3+S(I)*Q^2/2/GAM^2
200 FOR J=1 TO 3:QQ(J)=B(J)*Q*H(J)^(5/3)/N(J)/GAM:NEXT J
210 Q1(I)=QQ(1):Q2(I)=QQ(2):Q3(I)=QQ(3)
220 I=I+1:B(2)=B2(I)
230 GOSUB 500
240 NN(I)=NN(I)+1
250 F2=H2(I)+Z(I)+Q^2/(2*G)*PHI/GAM^3-S(I-1)*Q^2/2/GAM^2
260 F(I)=F1-F2
270 LPRINT USING "NN= ### ";NN(I)
280 LPRINT USING "F1= ###.### F2= ###.### F= ###.#####";F1;F2;F(I)
290 IF ABS(F(I))<1E-04 GOTO 330
300 FOR J=1 TO 3:H(J)=H(J)+F(I)*.7:NEXT J
310 H2(I)=H(2)
320 GOTO 230
330 H1(I)=H(1):H3(I)=H(3)
340 FOR J=1 TO 3:QQ(J)=B(J)*Q*H(J)^(5/3)/N(J)/GAM:NEXT J
350 Q1(I)=QQ(1):Q2(I)=QQ(2):Q3(I)=QQ(3)
360 NEXT II
370 FOR I=1 TO 10:HH(I)=H2(I)+Z(I):NEXT I
380 LPRINT "NO      H      H1      H2      H3      NN      F"
390 FOR I=1 TO 10
400 LPRINT USING "## ##.##  ##.##  ##.##  ##.##  ##.##  ##.##.##.##";
   ;I;HH(I);H1(I);H2(I);H3(I);NN(I);F(I)
410 NEXT I
420 LPRINT "NO      Q1      Q2      Q3"
430 FOR I=1 TO 10
440 LPRINT USING "##  #####.##  #####.##  #####.##  #####.##";
   ;I;Q1(I);Q2(I);Q3(I)
450 NEXT I
460 DATA 500,500,200,600,300,400,500,300,500
470 DATA 0,0.5,0.9,0.8,2.0,2.3,3.0,3.0,3.5,4.0
480 DATA 300,320,280,250,300,300,320,350,300,250
490 END
500 '
510 PHI=0:GAM=0
520 FOR J=1 TO 3
530 PHI=PHI+H(J)^3/N(J)^3*B(J)
540 GAM=GAM+H(J)^(5/3)/N(J)*B(J)
550 NEXT J:RETURN
```

(5) 演習問題4 (ニュートン法)

(1) プログラムのフローチャート



(2) プログラムの解説

文番号	解説
130	NI : 横断方向の分割数, NJ : 計算断面数.
140	X : 下流端からの距離 (m), Y : 横断幅 (m), Z : 河床高 (m), H : 水深 (m), HH : 水位 (m), SN : マニングの粗度係数, DQ : 分担流量 (m^3/s).
150	Q : 流量 (m^3/s), G : 重力加速度 (m/s^2).
160	EPS: 打切り誤差 ϵ .
170~230	下流端水位の設定. 計算諸元の入力.
250	KK : 繰返し計算回数の合計.
260	⑤式の AA を計算.
310	⑥式の BB を計算.
320~330	⑦式の CC を計算.
340	H_1 の初期値を $H_1 = H_2 + \Delta z$ で与える.
350	サブルーチン 470 以降で ⑧, ④, ⑪, ⑫, ⑯, ⑰ 式の計算.
360	⑨式の $f(H_1)$ を計算.
370	⑩式の $f'(H_1)$ を計算.
380	⑧式により ΔH_1 の計算.
390	前ステップでの H_1 の値に補正值 ΔH_1 を加える.
420	$ f(H_1) $ が許容誤差 ϵ 以内かどうか判断.

(3) プログラムのリスト

```

100   ' SAVE "FUT06"
110   '***** 不等流計算 演習問題 ( 6 ) *****
120 DEFINT I-N
130 NI-3 : NJ-10
140 DIM X(NJ), Y(NI, NJ), Z(NI, NJ), H(NI, NJ), HH(NJ), SN(NI, NJ), DQ(NI, NJ)
150 Q-1500 : G-9.8 : EPS-.001
160 HH(1)-2.5
170 FOR J=1 TO NJ
180 READ X(J), Y(2, J), Z(2, J)
190 FOR I=1 TO NI
200 IF I=2 THEN SN(I, J)-.03 : GOTO 220
210 SN(I, J)-.035 : Y(I, J)-150 : Z(I, J)=Z(2, J)+1.5
220 NEXT I
230 NEXT J
240 '*****
245 LPRINT "断面 N O 水位 左岸流量 低水路流量 右岸流量
繰り返し回数"
250 KK-0
260 A-Q^2/(2*G)
270 FOR J=2 TO NJ
280 K-0
290 JJ-J-1
300 DX-X(J)-X(JJ)
310 B-DX*Q^2/2
320 GOSUB 470: IF JJ-1 THEN GOSUB 660
330 C-HH(JJ)+A*PS/PL^3+B/PL^2
340 HH(J)-HH(JJ)+Z(2, J)-Z(2, JJ)
350 JJ-J : GOSUB 470
360 FH-HH(J)+A*PS/PL^3-B/PL^2-C
370 FHD-1+A*(PSD/PL^3+PS*PLD3)-B*PLD2
380 DH--FH/FHD
390 HH(J)-HH(J)+DH
400 K-K+1 : KK-KK+1
410 ' GOSUB 690
420 IF ABS(FH)>EPS THEN 350
430 GOSUB 660
440 NEXT J
450 LPRINT:LPRINT:LPRINT "繰り返し回数合計 -":KK
460 END
470 '*****
480 PS-0 : PL-0 : PSD-0 : PLD-0
490 FOR I=1 TO NI
500 H(I, JJ)-HH(JJ)-Z(I, JJ)
510 IF H(I, JJ)<0 THEN H(I, JJ)-0
520 PS-PS+H(I, JJ)^3*Y(I, JJ)/SN(I, JJ)^3
530 PL-PL+H(I, JJ)^(5/3)*Y(I, JJ)/SN(I, JJ)
540 NEXT I
550 FOR I=1 TO NI
560 DQ(I, JJ)-Y(I, JJ)*H(I, JJ)^(5/3)*Q/(SN(I, JJ)*PL)
570 NEXT I
580 IF J<>J THEN 650
590 FOR I=1 TO NI
600 PSD-PSD+3*(HH(J)-Z(I, J))^(2*Y(I, J))/SN(I, J)^3
610 PLD-PLD+5/3*(HH(J)-Z(I, J))^(2/3)*Y(I, J)/SN(I, J)
620 NEXT I
630 PLD3--3*PL^(-4)*PLD
640 PLD2--2*PL^(-3)*PLD
650 RETURN
660 '
670 LPRINT USING "##.##.##.##.##.##.##.##.##.##.##.##.##.##.##"
680 RETURN
690 '
700 LPRINT USING "###断面 ##回目 水位 -##.##.##.##.##.##.##.##"
:JJ, K, HH(J), FH
710 RETURN
720 DATA 0.300.0.0
730 DATA 500.320.0.5
740 DATA 1000.280.0.9
750 DATA 1200.250.0.8
760 DATA 1800.300.2.0
770 DATA 2100.300.2.3
780 DATA 2500.320.3.0
790 DATA 3000.350.3.0
800 DATA 3300.300.3.5
810 DATA 3800.250.4.0

```