

## 1次元保存則差分法による常射流混在流れの計算法

Practical Computations of Sub-Critical and Super-Critical Flow  
with 1D Conservative Scheme

山下 恭正<sup>\*1</sup>・清水 康行<sup>\*2</sup>・荒井 信行<sup>\*3</sup>・三谷 紀一<sup>\*4</sup>

By Yasumasa YAMASHITA, Yasuyuki SHIMIZU, Nobuyuki ARAI, Norikazu MITANI

This paper describes a numerical solution to the one-dimensional St. Venant shallow water equations with the MacCormack scheme. MacCormack scheme will be applied to the propagation of a shock wave in one-dimensional unsteady flow. The use of artificial viscosity to generate a smooth shock profile will be demonstrated. It is applied to over topping flow of levees including hydraulic jump. The results demonstrate the validity of the model.

Keywords: flood flow, rapid flow, super-critical and sub-critical flow,  
MacCormack scheme, artificial viscosity.

## 1. はじめに

差分法は偏微分方程式の数値解法のひとつである。その基本原理は偏微分方程式を差分方程式に変換し、それを代数的に解くことにある。これによって差分法は線形系および非線形系の両方に適用でき、複合現象あるいは複雑系を記述する偏微分方程式の数値解法に基づく数値実験の主要な役割を受けもつものである。

河川工学の分野においても流れや河床変動など種々の問題に差分法が応用されている。特に急流河川や構造物を含む流れは非常に複雑になり、実験あるいは経験的手法のみではその水理現象を明らかにできない場合が多い。これに対して、数値実験あるいは数値シミュレーションは、偏微分方程式などで記述された数学モデルを差分方程式に帰着させ、十分に吟味した初期条件、境界条件の下に数値的に解き、その仮説を試すことであり、流れという複雑系において最良の解を産み出すものである。

本研究は常射流混在流れを高精度な有限差分法により数値解析をすることを目的として行うものであり、1次元St. Venant浅水流方程式を基礎式としてMacCormackの差分スキームを用いた流れの数値計算法について述べたものである。MacCormack法は保存則差分法のひとつで、特に航空工学や機械工学の分野で複雑な物体まわりの流体解析に用いられている。衝撃波は保存則差分法を用いると、差分解としてそれを含む流

- 
- |           |                 |          |
|-----------|-----------------|----------|
| *1 正会員    | 北海道開発コンサルタント(株) | 水工部      |
| *2 正会員 工博 | 北海道大学助教授        | 工学部土木工学科 |
| *3 正会員    | 北海道開発コンサルタント(株) | 水工部      |
| *4 正会員    | 北海道開発コンサルタント(株) | 水工部      |

れが自動的に求められるので、特に特別な取扱いをする必要がない。近年水工学の分野においても、跳水などを含み局所的に流れが急変する場合に有効な差分法であるMacCormack法が1次元流れの計算<sup>1)</sup>や2次元流れの計算<sup>2), 3)</sup>に応用されている。しかしながら、これらの計算を行う場合、差分スキームの打ち切り誤差の影響と考えられる数値振動の発生が流れの急変部で顕著となり、数値解の信頼性が失われる。また、MacCormack法では予測子や修正子段階で前進差分と後進差分を繰返すために、上下流端境界でその外側の水理量が必要となる。本研究では、保存則差分法であるMacCormack法に関して数種の数値振動抑制手法や境界条件の処理について提案し、実験結果と比較することによりその有効性を検証するものである。

## 2. 流れの基礎式

解くべき問題の数学的表現として、基礎方程式が変数の保存性を表現している場合、これに対応する変換された差分方程式も保存性をもつ。数値実験的に見ると保存性を有した方程式の差分近似はより精度が良いことが知られている。ただし、方程式が保存則形式を用いても、そのことによって保存性を保証するものでなく、その差分スキームも保存性を備えている必要がある。

St. Venant浅水流方程式<sup>4)</sup>は、質量および運動量の保存則より成立ち、ダムブレイクによる洪水波の伝搬や跳水現象を表現することができる。1次元のSt. Venant方程式をベクトル形式で表示すると、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = E \quad (1)$$

のように表される。ここで、 $x$ は流下方向の座標、 $t$ は時間であり、保存式中の変数は、

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(I_b - I_r) \end{bmatrix} \quad (2)$$

である。ただし、 $h$ は水深、 $u$ は流速、 $g$ は重力加速度である。また  $I_b$  および  $I_r$  は、それぞれ河床勾配および河床摩擦勾配で、 $z_b$ を河床高、 $n$ をマンニングの粗度係数とすると以下のように表される。

$$I_b = -\frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (3), \quad I_r = \frac{n^2 u |u|}{h^{4/3}} \quad (4)$$

## 3. MacCormackの差分スキーム

MacCormack法は2段階Lax-Wendroff法のひとつと考えられ、衝撃波捕獲法として知られている。格子点上の値だけでスキームを記述できるから、境界条件を課すときに、格子中間点での境界条件を考える必要がないという利点がある。いま、保存形のSt. Venant方程式(1)式にMacCormack法を適用する。

$$\text{予測子段階} \quad U_i^* = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^n - F_i^n) + \Delta t E_i^n \quad (5)$$

$$\text{修正子段階} \quad U_i^{*+1} = 0.5(U_i^n + U_i^*) - 0.5(F_i^* - F_{i-1}^*) + 0.5\Delta t E_i^* \quad (6)$$

$$\text{精 度} \quad O(\Delta t^2, \Delta x^2)$$

ただし、 $n$ は時間ステップ、 $i$ は格子点番号、 $\Delta t$ は計算上の時間刻み幅、 $\Delta x$ は $x$ 座標上の差分間隔で、修正子段階の各保存変数は  $F_i^* = F(U_i^*)$ 、 $E_i^* = E(U_i^*)$  である。なお、下付き添字  $n$  はある変量の時刻  $n$  での値であることを、上付き添字  $*$  は予測子段階の解であることをそれぞれ示す。

この方法は各段階で後進あるいは前進差分を用いるが、この順序を逆にすることもできる。

#### 4. 安定条件

本スキームの安定条件は通常C. F. L条件により求められる。安定条件は一般的にCourant数 $C_n$ で表され、以下のように定義される。

$$C_n = \frac{\max(|u| + \sqrt{gh})}{\Delta x / \Delta t} \leq 1 \quad (7)$$

したがって、計算上の時間刻み幅 $\Delta t$ は、Courant数 $C_n$ の最大値が各計算ステップにおいて(7)式の条件を満たすように決定する。

#### 5. 境界条件

非定常流れの数値解析では適切な境界条件の設定が不可欠である。また、MacCormack法では予測子や修正子段階で前進差分と後進差分を繰返すために、上下流端境界で境界条件またはその外側の水理量が必要となる。通常、流れが常流の場合は上流端で流速 $u$ 、下流端で水深 $h$ を与え、射流の場合は上流端で流速 $u$ と水深 $h$ をあたえる。本計算モデルにおいては、初期条件に起因する攪乱を上下流端にスムーズに逃がして、反射のないきれいな波形を求めるために、以下に示す方法を用いた。

##### (1) 下流端境界

下流端境界において本スキームの予測子段階(5)式では前進差分をとるため、さらに下流の水理量が必要となる。この下流端境界外の条件 (extra-boundary condition) として、以下のように非保存変数の直線外挿により求めて計算を進める。

$$\begin{aligned} \bar{f}_{n+1}^n &= F(\bar{f}_{n+1}^n) \\ \bar{f}_{n+1}^n &= 2f_{n+1}^n - f_{n+1}^{n-1}, \quad \text{ここに } f = h, u \end{aligned} \quad (8)$$

また、下流端において流れが常流の場合、一定の水位に近づくように下流端の水深を補正する。

##### (2) 上流端境界

上流端境界において本スキームの修正子段階(6)式では後進差分をとるため、さらに上流の水理量が必要となる。この上流端境界外の条件として、以下のように非保存変数の直線外挿により求めて計算を進める。

$$\begin{aligned} \bar{f}_0^* &= F(\bar{f}_0^*) \\ \bar{f}_0^* &= 2f_1^* - f_2^*, \quad \text{ここに } f = h, u \end{aligned} \quad (9)$$

また、上流端において流れが常流の場合、一定の流量に近づくように上流端の流速を補正する。

#### 6. 数値散逸

段波や跳水などに備えるために、人工的に散逸項を導入して急激な圧力勾配などをやわらげ、強い衝撃波を安定化させる。一般的には、陽に人工粘性項を付加して数値振動を除去する手法がとられている。また、最近ではMacCormack法にTVD形式の人工粘性を付加した解析例<sup>5)</sup>が見られ、打切り誤差によるものと考えられる数値振動の除去に効果を上げている。本研究においては、MacCormack法に、2種類の人工粘性およびBorisのFCT法<sup>6)</sup>を用いて衝撃波の安定を図ることを試みた。

(1) 人工粘性 Type-1

人工粘性 Type-1 は、崇田ら<sup>1)</sup>が越流堤模型実験の再現計算に用いたもので、跳水前後の水深および流速の数値振動を比較的容易に抑制できる。

$$v_i = \frac{|h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}|}{h_{i+1} + 2h_i + h_{i-1}}$$

$$\alpha_i = \varepsilon \max(v_i, v_{i-1})$$
(10)

ただし、 $\varepsilon$ は人工粘性係数である。この人工粘性は時刻 $n+1$ の段階で得られた値から導かれる。適用にあたっては、(6)式で得られた保存変数を  $U_i^{**}$  とすると、人工粘性によって以下のように補正される。

$$U_i^{n+1} = U_i^{**} + \alpha_{i+1} \Delta U_{i+1}^{**} - \alpha_i \Delta U_i^{**}, \quad \text{ここに } \Delta U_{i+1}^{**} = U_{i+1}^{**} - U_i^{**}$$
(11)

(2) 人工粘性 Type-2

人工粘性 Type-2 は、圧縮性流体の衝撃波捕捉法<sup>6)</sup>に用いられているもので、弱いまたは強い衝撃波の両者に効果が期待できるものである。この人工粘性項は2次的に(1)式の右辺に付加される。すなわち、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = E + \nu \Delta x^2 [ |U_x| U_x ]_x$$
(12)

ただし、 $\nu$ は人工粘性係数である。この人工粘性も Type-1 と同様に時刻 $n+1$ の段階で得られた値から導かれる。適用にあたっては、(6)式で得られた保存変数を  $U_i^{**}$  とすると、人工粘性によって以下のように補正される。

$$U_i^{n+1} = U_i^{**} + \nu \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta [ |\Delta U_{i+1}^{**}| \Delta U_{i+1}^{**} ], \quad \text{ここに}$$

$$\Delta U_{i+1}^{**} = U_{i+1}^{**} - U_i^{**}$$
(13)

(3) FCTアルゴリズム

FCTアルゴリズム (Flux-Corrected Transport Algorithm) は、Borisによって初めて開発されたもので衝撃波や物理量の急激な勾配を扱う強力は方法に改良され、一般化<sup>7)</sup>されたものである。FCTを用いると、拡散効果は衝撃波の外側ではほぼ完全に打ち消され、MHDの衝撃波などに応用して、素晴らしい成功をおさめている。またFCTは、MacCormack法あるいはLax-Wendroff法に加えて用いることができる。

(6)式で得られた保存変数を  $U_i^{**}$  と置き換えたとき、FCTアルゴリズムは以下の6ステップより立つ。

1) Generate diffusive fluxes :  $f_{i+1/2}^d = \nu_{i+1/2} (U_{i+1}^n - U_i^n)$

2) Generate antidiffusive fluxes :  $f_{i+1/2}^{ad} = \mu_{i+1/2} (U_{i+1}^{**} - U_i^{**})$

3) Diffusive the Solution :  $U_i^{***} = U_i^{**} + f_{i+1/2}^d - f_{i-1/2}^d$

4) Calculate first differences of fluxes of  $U_i^{***}$  :  $\Delta U_{i+1/2}^{***} = U_{i+1}^{***} - U_i^{***}$

5) Limit the antidiffusive fluxes :  $S = \text{sgn} f_{i+1/2}^{ad}$

$$f_{i+1/2}^{ad} = S \max [0, \min \{ S \Delta U_{i+1/2}^{***}, |f_{i+1/2}^{ad}|, S \Delta U_{i+1/2}^{***} \}]$$

6) Antidiffusive the solutions :  $U_i^{n+1} = U_i^{***} - f_{i+1/2}^{ad} + f_{i-1/2}^{ad}$

ただし、 $\nu_{i+1/2} = \eta_0 + \eta_1 \left[ u_{i+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right]^2$ ,  $\mu_{i+1/2} = \eta_0 + \eta_2 \left[ u_{i+1/2} \frac{\Delta t}{\Delta x} \right]^2$  (14)

$$u_{i+1/2} = 0.5(u_i - u_{i+1}), \quad \eta_0 = 1/6, \quad \eta_1 = 1/3, \quad \eta_2 = -1/6$$

## 7. 適用例

本モデルの妥当性および各数値散逸項の効果を把握するために、石狩川遊水地越流部模型実験の再現検証を行った。実験水路は、長さ10m、幅1mの直線水路にのみ勾配1:10のマウンドが設けられている。実験条件は、流量 0.0797 m<sup>3</sup>/s、粗度係数 0.010、下流端水深 0.195mである。実験値と各計算値を Fig.1~4 に示した。なお、同図には実験値を黒丸で、初期条件から収束に至るまでの水位を各種の線で示した。

各計算結果とも初期条件に起因する段波は、下流端で反射することなくきれいに通過している。段波の波形はFCTの計算例では数値振動は見られない。跳水前の水位は、人工粘性 Type-2 とFCTとの計算水位とは他に比べ再現性がよく、人工粘性 Type-2 ではなまるようである。また跳水前の水位は、人工粘性 Type-2 は数値振動が完全に消えていないが、人工粘性 Type-1 とFCTとではほとんど数値振動は見られない。

これらの結果より、段波や跳水の前後で発生する数値振動は人工粘性によって抑制でき、この内最も効果的な手法はFCTで、ほぼ完全に拡散効果を打ち消すことができるものと考えられる。

## 8. おわりに

本報告は、St. Venant方程式を基礎式としてMacCormackの差分スキームを用いた流れの数値計算法について述べたものである。保存則差分法を用いる必要性は、段波や跳水のようなshock現象、すなわち不連続を含む流れを記述するためである。MacCormack法は、衝撃波捕捉法のひとつであり、FCTなどの人工粘性を併用することにより衝撃波前後の拡散効果はほぼ完全に打ち消され、数値振動のないきれいな波形（水面形）を予測することができる。また下流端境界などにおいて、本モデルに境界外条件を付加することにより、反射のないきれいな波形を求めることができるものと考えられる。今後は問題点等も含め、さらに再現性の向上に努め、多次元のモデルに本手法を取入れて行かなければならないものと考えられる。

## 参考文献

- 1) 崇田徳彦、清水康行、渡邊康玄；MacCormack法を用いた常・射流計算、北海道開発局開発土木研究所月報 No.448、1990年9月。
- 2) 北條紘二、畑 敏夫、清水康行；合流部における2次元流況計算法について、北海道土木学会支部1990年2月。
- 3) 清水康行、山下恭正、山下彰司、崇田徳彦；一般曲線座標系を用いた常・射流混在流れの計算、北海道開発局開発土木研究所月報 No.455、1991年4月。
- 4) R.Garcia and R.Kawawita；Numerical solution of the St.Venant equations with the MacCormack finite-difference scheme, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1986.
- 5) 塩田智道、河村三郎；一次元保存則系差分法による数値解析の際に生ずる数値振動の除去法について 土木学会水工学論文集 第36巻 1992年2月。
- 6) C.A.J.Fletcher；Computational Techniques of Fluid Dynamics Volume II.
- 7) D.L.Book, J.P.Boris and K.Harin；Flux-Corrected Transport II, Generalization of the Method, J. of Computational Physics, Vol.18, 1975.

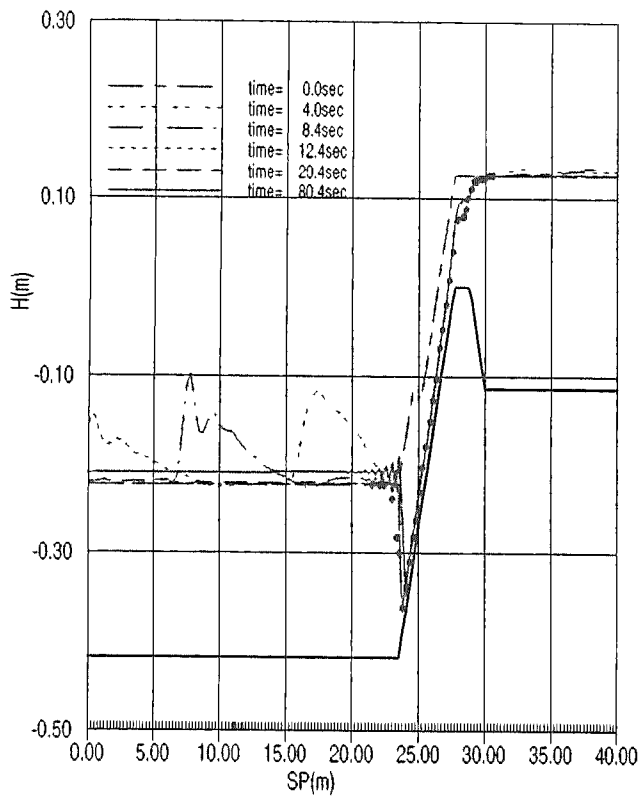


Fig. 1 MacCormack scheme

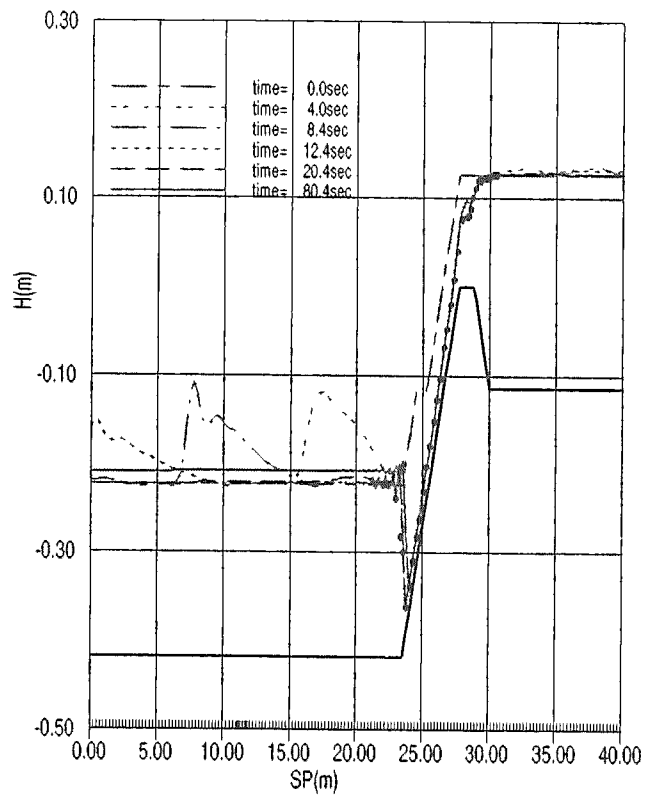


Fig. 3 MacCormack scheme  
+ Artif. Visc-2 ( $\nu=1.0$ )

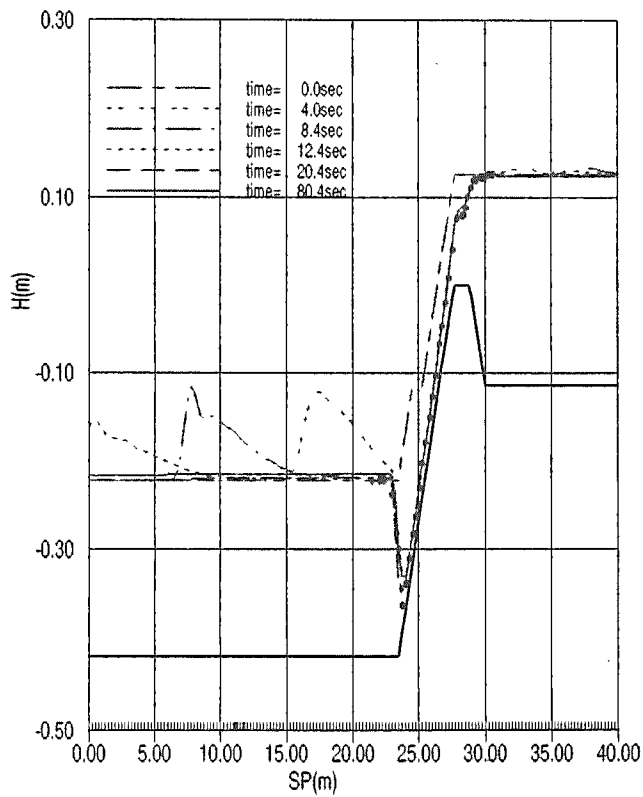


Fig. 2 MacCormack scheme  
+ Artif. Visc-1 ( $\epsilon=1.0$ )

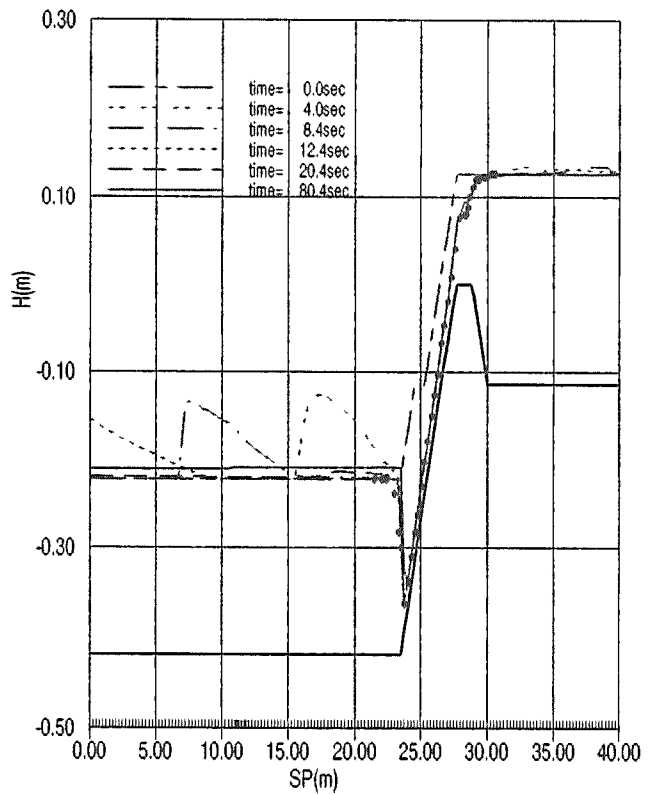


Fig. 4 MacCormack scheme  
+ FCT