

北海道大学	正員	長谷川和義
北海道大学工学部	学生員	中村健作
北海道開発局	正員	清水康行
北海道開発局	正員	渡邊康玄
北海道開発局	正員	鳥谷部寿人

1. はじめに

蛇行流路において交互砂州と流路の湾曲効果が一致したときに、外岸部の河床がが大きく洗掘されることがある。この状態を共振という。本論文は、平成4年10月より北海道開発局開発土木研究所で行われた移動床蛇行水路実験のデータと、新たに平成5年度より同研究所で行われた実験データをもとに、共振状態を含む河床形状の特性を主に波数解析の立場から検討したものである。

2. 実験の概要

2-1. 実験条件

本実験に用いられた流路形状のうち、RUN1のシリーズ直線水路、RUN2～、RUN11のシリーズは蛇行水路であり、両者とも平成4年度に行われた実験である。またRUN15～、RUN23のシリーズは平成5年度に新たに行われた蛇行水路実験である。表-1,2に出すように、平成5年度に行われた実験は平成4年度に行われた実験条件を補完するものとなっている。各実験シリーズは、流量を変えた4種類の水理条件を与えており、RUN\*-1からRUN\*-4に変化するにしたがって流量を落として砂州の発生条件に入るようにしている。

ただし

- R: 曲率半径
- L: 蛇行波長
- B: 流路幅 とする。

2-2. 実験方法

長さ25m幅3mの台の上に高さ30cm幅30cmのプラスチック性の蛇行水路を載せる。各runのシリーズ毎に水路の平面形状が違う。流径0.056cmの砂を直線水路の場合20cm、蛇行水路の場合15cmの深さまで敷き詰める。台の勾配に合わせて、河床面に若干の補正を行う。河床面を水平にした後上流から水を流す。おおよそ河床面が安定した後、台車の上に載せた河床読みとり装置によって水面勾配の計測を行う。計測は一定間隔の断面ごとに行う。水面勾配の計測が終了した後、通水をやめ水を抜いていく。写真撮影の後河床読みとり装置によって河床形状の計測を行う。同一の平面形状において異なった水理量で4つのパターンの実験を行う。

RUN11-*	L/B=6.28
RUN9-*	L/B=10.47
RUN23-*	L/B=12.566
RUN7-*	L/B=15.7
RUN18-*	L/B=17.952
RUN5-*	L/B=20.93
RUN16-*	L/B=25.133

表-1  
曲率半径/流路幅比  
R/B=5.0の実験に  
おける形状特性

RUN10-*	L/B=6.28
RUN8-*	L/B=10.47
RUN22-*	L/B=12.566
RUN6-*	L/B=15.7
RUN17-*	L/B=17.952
RUN4-*	L/B=20.93
RUN15-*	L/B=25.133
RUN2-*	L/B=31.4

表-2  
曲率半径/流路幅比  
R/B=10.0の実験に  
おける形状特性

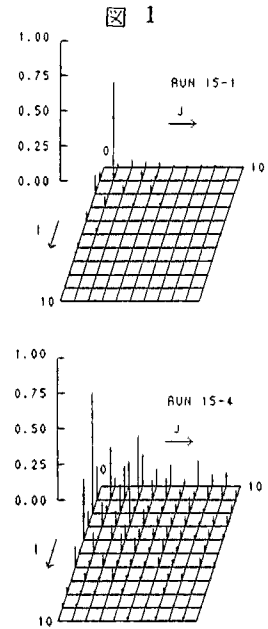
Harmonic analysis on free and forced bar forms in experimental meandering channels with resonance condition by Kazuyoshi HASEGAWA, Kensaku NAKAMURA, Yasuyuki Shimizu, Yasuharu WATANABE, Toshihito TOYABE.

### 3. 二重三角多項式を用いた河床形状の波数解析

流路中心線に沿って下流向きにs軸を、これに直交してn軸をとり、平均河床面からの底面変位を $\eta$ （浸食を正）とする。 $\eta$ を二重三角多項式にて表すと、

$$\eta = \sum \sum A_{ij} \sin \left( \frac{2\pi i}{2B} s - \frac{\pi}{2} \delta_{ie} \right) \cos \left\{ \frac{2\pi j}{L} (s - \sigma_{ij}) \right\} \quad (1)$$

となる。ただし、 $\eta = \eta/H_0$ 、 $H_0$  = 平均水深、 $B$  = 流路幅、 $L$  = 流路蛇行長または平均交互砂州長の2倍、 $A$  = 平均水深にて無次元化した成分波の振幅、 $\sigma$  = 位相距離、 $i, j$  = それぞれ、流路幅の2倍および蛇行長を基本波長とするときのモード、 $\delta_{ie} = (1 + (-1)^i) / 2$ である。全実験における河床形状について式(1)による展開を行い、 $(i, j)$ に対する振幅分布を計算した。例としてRUN15-1とRUN15-4の振幅分布図を図1に載せる。同図によれば砂州の発生条件内にあるRUN15-4の方が様々な波数成分を含んでいることがわかる。しかし、卓越する成分が $(1, 1)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(3, 1)$ 、 $(2, 2)$ などであることは共通しており、すべての実験シリーズにおいても同様な結果が得られた。



### 4. 主要波振幅の特徴

図A-11, 図A-22, 図A-20, 図A-31は、横軸に(蛇行長 $L$ /流路幅 $B$ )を、縦軸に水深によって無次元化した主要波振幅成分 $A_{ij}/H_0$ をとり、無次元曲率 $R/B=5.0$ および $10$ のそれぞれについて分けて実験結果を示したものである。

図B-11, 図B-22, 図B-20, 図B-31はそれぞれ横軸に黒木らによる砂州の区分パラメータ $B \cdot I^{0.2} / H$  (流路幅 $B$ , 水深 $H$ , 水路勾配 $I$ )をとり、縦軸に水深によって無次元化した主要波振幅成分 $A_{ij}/H_0$ をとって、実験結果を示したものである。ただし、図中のプロット点のシンボルは以下に示すとうりである。

図Aにおいて	● : RUN*-1	図Bにおいて	▽ : RUN10-*, RUN11-*
	▲ : RUN*-2		◇ : RUN8-*, RUN9-*
	■ : RUN*-3		■ : RUN22-*, RUN23-*
	◆ : RUN*-4		□ : RUN6-*, RUN7-*
			▲ : RUN17-*, RUN18-*
			△ : RUN4-*, RUN5-*
			● : RUN15-*, RUN16-*
			○ : RUN2-*, RUN3-*

を表す。

#### (1, 1)の波について

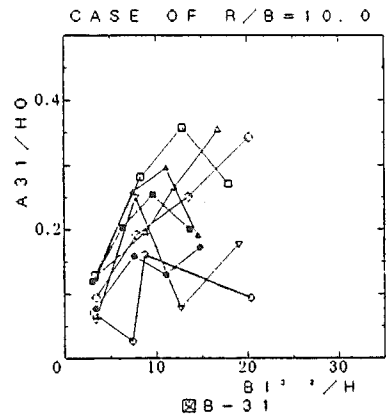
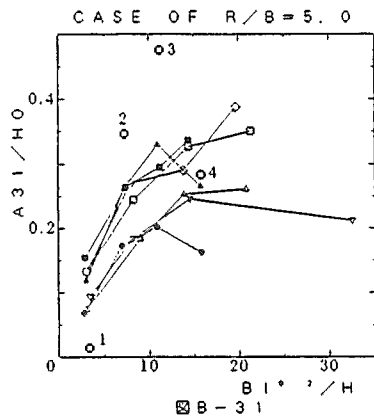
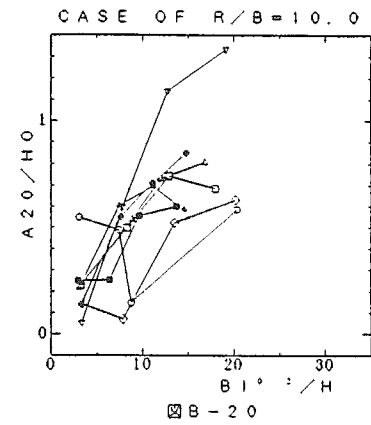
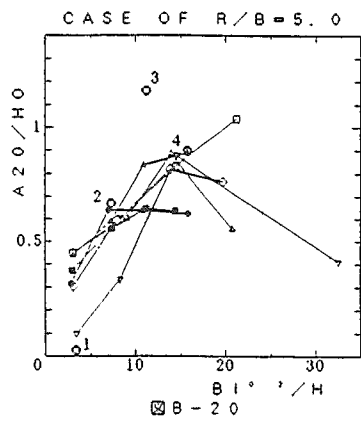
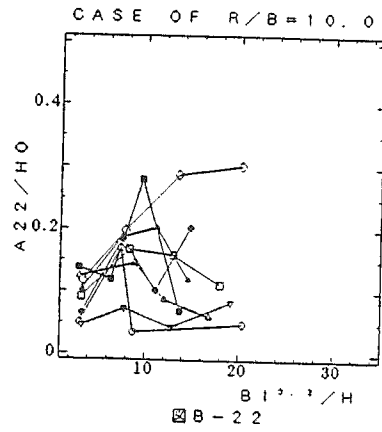
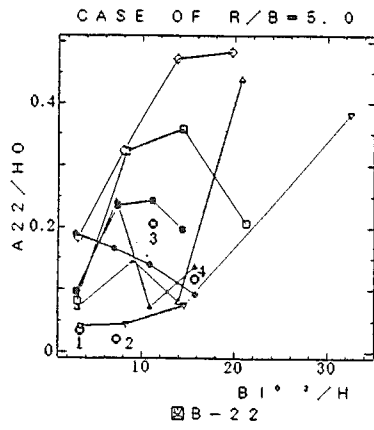
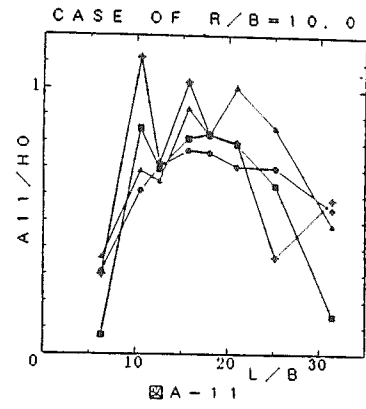
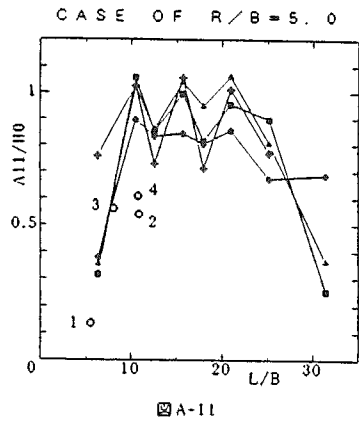
図A-11を見ると、基本波である $(1, 1)$ の波は、 $L/B=10 \sim 23$ の範囲で砂州、非砂州に関わらず大きな値を示していることが分かる。 $L/B$ がこの範囲からはずれたり、直線水路の場合は低い値を示す。図中3つの起伏が認められるが、これは平成5年度に行われた実験の水深が大きく計測されたために生じたものであり、有意なものか否かは現在のところ明らかにできていない。再実験を企画中である。

#### (2, 2)の波について

図B-22における $R/B=5.0$  (平成4年度)のケースを見ると、 $(2, 2)$ の波は蛇行水路でしかも砂州条件の場合に大きな値を示すことが分かる。ただし図B-22、 $R/B=10.0$  (平成5年度)のケースでは、この振幅成分は小さな値を示している。つまり、無次元曲率が小さくなると値が小さくなる傾向を示す。

#### (2, 0), (3, 1)の波について

これら2つの波の振幅成分は、直線水路と蛇行水路のいずれにおいても砂州区分パラメータ $B/H \cdot I^{0.2}$ の増加と共に急激に大きくなる。しかし、蛇行水路で波長が非常に大きい場合には $B/H \cdot I^{0.2}$ が大きくなってもその値は大きくならない。



主要振幅波の特徴

## 5. 共振条件の検討

### 5-1. Parkerの共振条件

Parker(3)らは、2次元蛇行移動床の線形化方程式が空間的振動方程式となることを示し、同次方程式部分が砂州発生に対応し、蛇行湾曲が強制項に相当するものと考えて共振条件を導いている。以下にその要部を紹介しながら論を進める。彼らは、水深平均を施した流下方向、横断方向の各運動方程式、連続式、流砂連続式、流砂量式から出発して湾曲水路に対する線形化方程式を導き、これを曲がりの効果の部分と砂州効果の部分に分割して非常に分かりやすい説明を行っている。このうちの砂州効果の部分の線形化方程式を記述すると以下のようなものである。

$$\begin{cases} r u_F' + 2P u_F + P_1 \eta_F = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r u_F' - r \eta_F' + \frac{\partial v_F}{\partial n} = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} r M u_F' + r M_1 \eta_F' + \frac{\partial v_F}{\partial n} - \Gamma \frac{\partial^2 \eta_F}{\partial n^2} = -r(M-1) u_c' + r(M_1+1) h_c' & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_F|_{n=\pm 1} = 0, \quad \frac{\partial \eta_F}{\partial n}|_{n=\pm 1} = 0 & (5) \end{cases}$$

ここに、 $r = 2\pi Ho / (LC_1)$ 、 $C_1$  = 平均流の摩擦係数、 $U_F$ 、 $v_F$ 、 $\eta_F$  = それぞれ流下方向流速、横断方向流速、河床変位の砂州効果による摂動分(平均量により無次元化)、 $U_c$ 、 $h_c$  = 曲がり効果による流下方向流速、水深の摂動分(平均量により無次元化)、 $P$ 、 $P_1$  = それぞれ、摩擦係数のせん断力および水深に関する変化率にかかる係数、 $n$  = 流路半幅によって無次元化された横断方向軸、 $\phi$  は流下方向軸  $\phi$  に関する微分を表す。

式(2)、(3)および式(4)の右辺を0とおいた式系は、砂州と流れを表す線形化方程式に完全に一致している。違いは式(4)の右辺が存在することで、これが曲がりによる砂州の変形効果(強制項)を与えている。

これらの式を  $\eta$  について整理し、さらに  $\eta_F = \eta_{Fb} \sin(n\pi/2)$  とおくと(6)式になる。

$$\begin{aligned} \eta_{Fb}'' + \frac{r \left\{ M_1 + 1 - \frac{P_1}{2P}(M-1) + \frac{\pi^2 \Gamma}{8P} \right\}}{\frac{r^2}{2P}(M_1+1)} \eta_{Fb}' + \frac{\frac{\pi^2}{4} \Gamma}{\frac{r^2}{2P}(M_1+1)} \eta_{Fb} \\ = \frac{8}{\pi^2} \frac{D_1 + \frac{r}{2P} D_2}{\frac{r^2}{2P}(M_1+1)} \cos \phi + \frac{8}{\pi^2} \frac{D_2 - \frac{r}{2P} D_1}{\frac{r^2}{2P}(M_1+1)} \sin \phi \end{aligned} \quad (6)$$

ただし、 $\phi = 2\pi s/L$ 、 $\Gamma = 2.67 (2Ho/B)^2 / C_{10} \sqrt{\tau_{*c}/\tau_{*o}}$ 、 $\tau_{*o}$ 、 $\tau_{*c}$  = 無次元掃流力およびその限界値、 $M$ 、 $M_1$  = 流砂量のせん断力に関する変化率に関わる係数。

さて式(6)は空間的な強制振動の式形をなしており、その共振条件は左辺第三項の係数が強制振動の波数に一致することである。

$$r_{res} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2P\Gamma}{M_1+1}} \quad (7)$$

ただしParkerは、砂州の発達が停止する中立条件をもとに、もう一つの条件

$$\Gamma_{res} = \left( \frac{2}{\pi} \right) \{ (M-1)P_1 - 2P(1+M_1) \} \quad (8)$$

をも与えており、これら2式をもって共振条件としている。しかし、(8)式の  $\Gamma$  は与えられた実験条件のもとで常実現するわけではなく、通常(8)式とは異なる値をとる。したがって、共振条件は式(7)のみによって検討する方が良いであろう。もし  $\Gamma \neq \Gamma_{res}$  であれば、砂州としては発達あるいは減衰することになるが、このときの  $\eta$  は他の効果(おそらく非線形効果)によって強制項に吸収されるものと考えられる。すなわち、ここで式(7)から共振波長  $Lr$  を  $Lr = 2\pi Ho / (r_{res} c_1) \dots (9)$  にて与えるものとする。

### 5-2. 共振条件の実験値による検討

図P-1は横軸に $L/L_r$ （波長/Parkerの理論式による共振波長 $L_r$ ）をとり、縦軸に $A_{11}/H_0$ （(1,1)の振幅成分/平均水深）をとったものである。この図によると実験点が $L/L_r = 1$ に頂点を有する山形の分布をなしていることが分かる。ただし、全般的に $R/B=5.0$ （無次元曲率大きい）ケースが大きめの値を示している。このことは、曲率が大きい方がより強く強制項として働き、振幅成分が大きくなることを示すものである。

以上により、Parkerの共振条件の一つが有意なものであることが明らかになったが、図を詳細にみると、プロット点は単調な山をなしていないことが分かる。この原因の一つに、式(6)の右辺強制項の振幅が $r$ すなわち $L$ の関数となっていることが挙げられる。応答振幅は、 $L$ に関してかなり複雑な関数になっているわけである。さらに、実現象の非線形性が考えられる。式(6)の左辺に $\eta_{r_0}$ の三乗の項がつけ加わった式はDuffingの式として知られ、その波数応答は波数に対して三価をとる複雑なものになったり、パラメータ次第でカオス状態を示すことがあるようである。描点の複雑な散らばりは、こうした効果によるものかも知れない。

### 5-3. 曲がりによる効果を取り去った実験値による検討

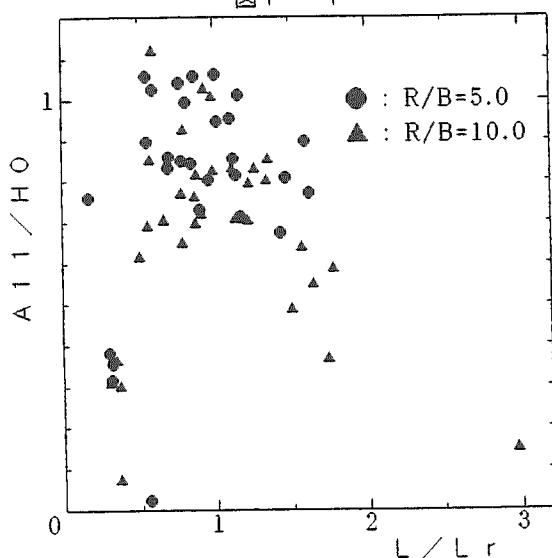
式(6)は基本的に曲がりの効果を引き去ったときに関して成り立っている。そこで、実験値についても曲がりによる洗掘の成分を除いて式(9)との対応を調べてみる。

各実験ケースにおいて、RUN\*-1は非砂州条件での実験であり、この実験では曲がりのみの影響を受けたデータが得られる。一方、RUN\*-2,3,4は砂州条件での実験であり、これから曲がりと砂州の両者の影響を受けたデータが得られる。ここで、RUN\*-2,3,4のデータからRUN\*-1のデータを差し引くことを考える。これは、（曲がりと砂州のデータ）-（曲がりのデータ）という計算を行うこととなり、結局（曲がりの影響を受けた砂州のデータ）が得られることになる。この計算を各ケースについて行い、上述の3節と同様の波数解析を行って(1,1)の無次元振幅成分を求める。ただし、Run\*-1と他では平均水深のみが異なり、他が全て同一の条件にあるので、差し引くべき曲がりによる洗掘深を一樣湾曲の洗掘深式を用いて次のように補正する。すなわち、2つの実験1,2における $\eta_{c1}$ 、 $\eta_{c2}$ の比率が、

$$\frac{\eta_{c2}}{\eta_{c1}} = \left( \frac{\tau_{+2}}{\tau_{+1}} \right)^{0.5} \frac{h_2}{h_1} = \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^{3/2} \quad (10)$$

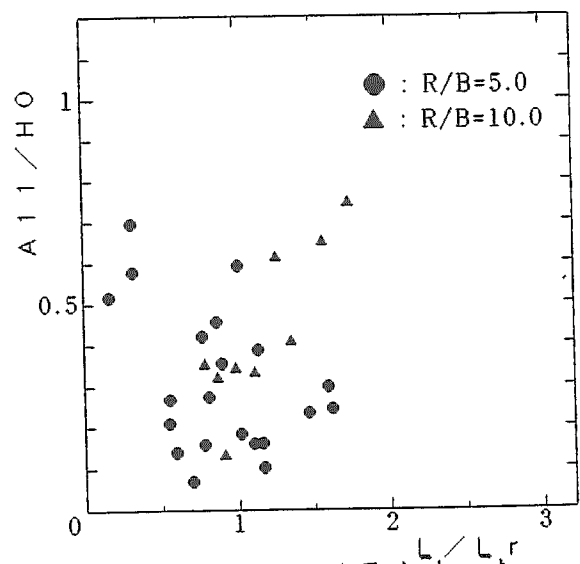
を満たすものと仮定し、 $\eta_{c1}$ を $\eta_{c2}$ に変換することにする。図P-2は、このようにして求めた $A_{11}/H_0$ と $L/L_r$ の関係を見たものである。図P-1と比較して、データのまとまりはかえって悪くなっているようである。ただし図P-1と違うところは $R/B=10$ （曲率半径が大きい場合）の方が全般的に大きな値を示している。明瞭な関係が見いだせない原因は、曲がり成分を単純に引き去ったことにあるが、図の持つ意味についてはさらに検討するつもりである。

図P-1



共振条件の実験値による検討

図P-2



曲がりの効果を取り去った  
実験値による検討

## 6. まとめ

- ① (1,1)の波は $L/B=10\sim 23$ の範囲で0.8~1.0の値を示す。それ以外では小さな値を示す。
- ② (2,2)の波は蛇行水路でしかも砂州条件の場合に大きな値を示す。しかし、無次元曲率が小さくなると値は小さくなる。
- ③ (2,0),(3,1)の波は砂州条件になるにつれて大きくなるが、蛇行水路において波長が非常に大きいとき砂州条件になっても値は大きくならない。
- ④ Parkerの共振条件の一つは有意なものであるが、プロット点は単純な山形では表せない。この理由の一つとして式(6)の右辺強制項が複雑な $L$ の関数となっていることが挙げられる。二つ目の理由として実現象の非線形性が挙げられる。

---

## 参考文献

- (1)中村、長谷川、清水、渡邊、鳥谷部：土木学会北海道支部論文報告集、第49号、1993
- (2)鳥谷部、渡邊、清水、中村、長谷川：土木学会北海道支部論文報告集、第49号、1993
- (3)中村、長谷川、鳥谷部、渡邊、清水：土木学会第48回年次学術講演会講演概要集1993
- (4)Parker, M. and Johansson: Observation on several recent theories of resonance and overdeeping in meandering channels, AGU WATER RESOURCES MONOGRAPH 12, River Meandering, 1989