

1 はじめに

水制等の河川構造物周辺の流れや土砂輸送およびこれに伴う河床の変化を的確に予測することは河川計画上重要な課題である。一般に、構造物背後の土砂堆積は乱流拡散や 2 次流の効果により土砂が運搬されることにより生ずる。構造物など流水中の障害物背後の 2 次元的な (平面 2 次元または鉛直 2 次元) 乱流拡散現象の研究は古くは Plandtl¹⁾ などに始まり、最近では柿崎・長谷川²⁾による水制背後の流れの構造の研究等へと至っている。これらの研究成果を踏まえ、著者ら^{3),4),5)}は水制背後の水深平均流の計算に乱流拡散の影響を組み入れたモデルの開発を行った。これによると、構造物背後のように隣あう場所で Reynolds 数の横断方向の差が非常に大きい条件下では、乱れによる運動量の拡散効果が平均流速の決定に対して重要な役割を果たすという結論が得られている。

しかしながら、構造物等の背後においては水深平均流の他に活発な 2 次流の発達が見られ、この 2 次流を適切に計算することが流砂や河床変動の計算にとって不可欠である。本研究はこの構造物背後の 2 次流を数値計算モデルにより予測する手法について検討を行うものである。清水⁶⁾は、構造物背後のような 3 次元流を 3 次元の数値計算モデルで直接計算するモデルの開発を行っている。この方法は 3 次元流れの運動方程式と連続の式を直接計算する方法で精度も高い手法と考えられるが、計算方法が非常に難しい点及び莫大な計算時間を要する点から実用的なモデルとはなっていない。本研究においては計算時間も 2 次元数値計算程度および計算方法も簡単でしかも 3 次元数値計算に近い計算精度が得ることが可能なモデルの開発を行う。

2 研究目的

構造物背後の流れの基本的な構造を明らかにするため、レーザ流速計を用いて単一水制周辺の 3 次元流れの計測を行った。図-1 はこの実験結果の一部である横断方向流速分布 [水制先端より 1cm 外側の測線の水制下流側 (a)(b)(c) 地点の鉛直方向流速分布] (図-2、表-1 参照) を示すものである。(水制背後から水制の外側に向かう流れを正とする。) この図は水制背後の 2 次流の特性を表しているものであり、河床付近では水制背後に向かう流れが卓越し、これ以外の部分では水制背後から水制の外側へと向かう流れが卓越している。この実験結果に見られる河床付近の流れが、水制背後の土砂堆積現象に重要な役割を果たしていると考えられる。しかしながら、この現象を平面 2 次元的な計算方法で予測することは不可能である。3 次元モデルを用いることによりこの 2 次流を計算することは可能と考えられるが、本研究においては実用性や経済性を重視し 2 次元浅水流モデルで得られた水深平均流速 U, V (U は流下方向流速、 V は横断方向流速) を 3 次元の流下方向および横断方向の運動方程式に代入することで、2 次流を計算することが可能な準 3 次元モデルの開発を行うこととする。

3 本モデルの基本概念

一様湾曲部に発生する 2 次流を算出する方法は Englund 等⁷⁾により行われている。この方法は 3 次元の横断方向運動方程式中、遠心力以外の慣性項を省略し、移流拡散項のうち z 方向以外の項を省略した以下の式より算出している。

$$-\frac{u_s^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K_s \frac{\partial v_n}{\partial z} \right) \quad (1)$$

ここで、 s_0, n, z はそれぞれ流下方向、横断方向および鉛直方向の距離、 u_s, v_n は s_0, n 方向の流速成分、 ρ は流体の密度、 p は圧力、 K_s は $\kappa u_* h / 6$ (ただし κ はカルマン定数、 u_* は摩擦速度、 h は水深、 r は流路の曲率半径である。(1) 式を 2 回

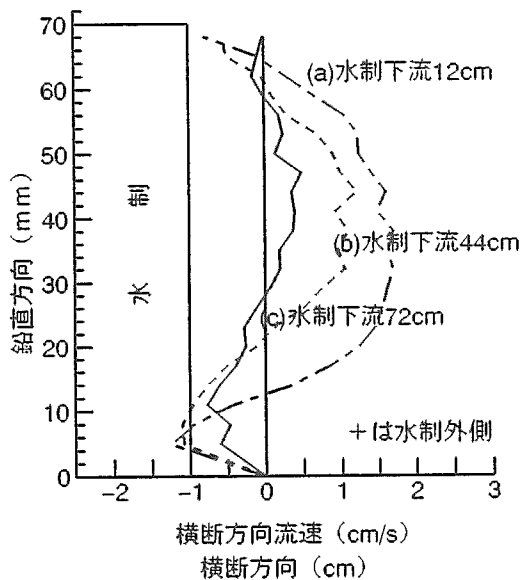


図-1 水制背後の横断方向流速 (2 次流)

ここで、 s_0, n, z はそれぞれ流下方向、横断方向および鉛直方向の距離、 u_s, v_n は s_0, n 方向の流速成分、 ρ は流体の密度、 p は圧力、 K_s は $\kappa u_* h/6$ (ただし κ はカルマン定数、 u_* は摩擦速度、 h は水深)、 τ は流路の曲率半径である。(1) 式を 2 回積分し、境界条件として河床での流速 (=slip velocity) および水面でのせん断力 (=0) を与えることにより、湾曲部における 2 次流の流速分布が算出される。本研究においては、この方法を水制背後の 2 次流の計算に以下に示す方法で拡張を行う。

2 次元浅水流モデルで求められた水深平均流速をもとに、流速分布の第 1 次近似として対数則 [正確には後述の (8) 式] を与え、3 次元の運動方程式に代入することで (1) 式と同様な形に置き換えることが可能となる。これを z に関して 2 回積分することにより水深方向の流速分布が得られる。さらに、これを水深平均してこの結果が 2 次元浅水流モデルにより得られた水深平均流速に一致することを用いて水面勾配を求める。

4 基礎式の誘導

直交直線座標系における 3 次元の横断方向の運動方程式は (2), (3) 式で示される。

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \quad (2)$$

ここで

$$\tau_{xy} = \nu_t \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \tau_{yy} = 2\nu_t \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{yz} = \nu_t \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (3)$$

ただし、 x, y, z はそれぞれ流下方向、横断方向、鉛直方向の座標軸、 u, v, w はそれぞれ x, y, z 軸方向の流速成分、 $\tau_{xy}, \tau_{yy}, \tau_{yz}$ は互いに独立なせん断応力成分、 ν_t は渦度粘性係数である。以下の説明では便宜上河床を $z = 0$ とする。本モデルにおいては、鉛直 (z) 方向の流速を $w \approx 0$ と仮定し、(2), (3) 式の w に関する項を省略することにする。

w を省略した横断方向の運動方程式を (4), (5) 式に表す。

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu_t \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4)$$

ここで、

$$\tau_{xy} = \nu_t \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \tau_{yy} = 2\nu_t \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \tau_{yz} = \nu_t \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (5)$$

渦度粘性係数は水深平均成分と鉛直分布成分とに分けて、次式で表されるものと仮定する。

$$\nu_t = K_0 k(\xi) \quad (6)$$

ここで K_0 は水深平均に関する成分で $\kappa u_* h$ とする。 $k(\xi)$ は等流状態における正確な流速分布を得るために Ratteray-Mitsuda 等⁸⁾と同様に水深の 2 割を境界に次式で表すものとする。

$$k(\xi) = \begin{cases} \alpha \xi (1 - \xi) & \xi < 0.2 \\ \alpha / \beta & \xi \geq 0.2 \end{cases} \quad (7)$$

ここで $\alpha = 6.25, \beta = 6$ を用いる。

1 次元等流状態を仮定したとき平均流速 U, V と水深方向の個々の流速 u, v との関係式は次式で表される。

$$u = U \Phi(\xi_0, \xi), \quad v = V \Phi(\xi_0, \xi) \quad (8)$$

ここで $\Phi(\xi_0, \xi)$ は (6) 式の $k(\xi)$ に (7) 式を用いて算出される 1 次元等流の無次元流速分布 [水深の 2 割以下で対数則、2 割以上では放物則を仮定 (対数-放物則) したものである。なお、 ξ は z を水深 h で無次元化した値 (= z/h)、 ξ_0 は流速を 0 とする点の河床から無次元距離、 U, V は 2 次元浅水流モデルにより求まる x, y 軸方向の水深平均流速である。(8) 式を (4) 式に代入すると (9) 式が得られる。

$$\Phi(\xi_0, \xi)^2 \left[U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} \right] = -g \frac{\partial (H + h')}{\partial y} + k(\xi) \Phi(\xi_0, \xi) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial V}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(K_0 \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] + \frac{K_0}{h \partial \xi} \left(k(\xi) \frac{\partial v}{h \partial \xi} \right) \quad (9)$$

ただし、 H は水位、ここでは 2 次元浅水流モデルで算出された値である。また h' は対数-放物則からはずれる部分について合う水位であり、 $(H + h')$ を計算で求めることで 2 次流の効果を見込む事が可能となる。(9) 式を $\Phi(\xi_0, \xi)$ の 2 次方程式の形に置き換えると (10) 式が得られる。

$$a_v \Phi(\xi_0, \xi)^2 + b_v k(\xi) \Phi(\xi_0, \xi) + c_v = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(k(\xi) \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) \quad (10)$$

ここで $\Phi(\xi_0, \xi)^2$ 、 $\Phi(\xi_0, \xi)$ の係数をそれぞれ a_v 、 b_v とし、圧力勾配の項を c_v とする。

$$a_v = \frac{h^2}{K_0} \underbrace{\left(U' \frac{\partial V}{\partial x} + V' \frac{\partial V}{\partial y} \right)}_{\text{加速度項}} \quad (11)$$

$$b_v = \underbrace{-\frac{h^2}{K_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial V}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(K_0 \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right]}_{\text{拡散項}} \quad (12)$$

$$c_v = \frac{gh^2}{K_0} \underbrace{\frac{\partial(H+h')}{\partial y}}_{\text{水面勾配}} \quad (13)$$

(10) 式を ξ で積分すると (14) 式が得られる

$$k(\xi) \frac{\partial V}{\partial \xi} = a_v \int_{\xi_0}^{\xi} \Phi(\xi_0, \xi)^2 d\xi' + b_v \int_{\xi_0}^{\xi} k(\xi') \Phi(\xi_0, \xi) d\xi' + c_v \xi + c_1 \quad (14)$$

ここで、 c_1 は積分常数である。水面ではせん断力が 0 であるため、 $\xi = 1$ の時 $\partial v / \partial \xi = 0$ となる。これにより c_1 が求まり、(14) 式は (15) 式になる。

$$\frac{\partial V}{\partial \xi} = -\frac{1}{k(\xi)} \left[a_v \int_{\xi}^1 \Phi(\xi_0, \xi)^2 d\xi' + b_v \int_{\xi}^1 k(\xi') \Phi(\xi_0, \xi) d\xi' + c_v (1 - \xi) \right] \quad (15)$$

さらに (15) 式を $\xi = \xi_0$ で $V = 0$ の境界条件の下に ξ に関して積分を行うことにより水深方向の流速分布が得られる。

$$v = - \left[a_v \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{k(\xi')} \int_{\xi'}^1 \Phi(\xi_0, \xi)^2 d\xi'' d\xi' + b_v \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{k(\xi')} \int_{\xi'}^1 k(\xi'') \Phi(\xi_0, \xi) d\xi'' d\xi' + c_v \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1 - \xi'}{k(\xi')} d\xi' \right] \quad (16)$$

(16) 式が本モデルにより得られる水深方向の流速分布である。(16) 式中の a_v 、 b_v は 2 次元モデル⁵⁾ で得られる U 、 V を (11)、(12) 式に代入して得られる。なお、(16) 式には未知数 c_v が含まれており、これを以下の方法で決定する。

v を水深平均した値が、水深平均流速 V となること ($V = \int_{\xi_0}^1 v d\xi$) を考慮すると (17) 式が得られる。

$$V = - \left[a_v \int_{\xi_0}^1 \int_{\xi_0}^{\xi'} \frac{1}{k(\xi)} \int_{\xi''}^1 \Phi(\xi_0, \xi)^2 d\xi''' d\xi'' d\xi' + b_v \int_{\xi_0}^1 \int_{\xi_0}^{\xi'} \frac{1}{k(\xi)} \int_{\xi''}^1 k(\xi''') \Phi(\xi_0, \xi) d\xi''' d\xi'' d\xi' + c_v \int_{\xi_0}^1 \int_{\xi_0}^{\xi'} \frac{1 - \xi''}{k(\xi'')} d\xi'' d\xi' \right] \quad (17)$$

(17) 式より c_v が求められ、(18) 式のようになる。

$$c_v = \frac{-V + a_v \int_{\xi_0}^1 \int_{\xi_0}^{\xi'} \frac{1}{k(\xi'')} \int_{\xi''}^1 \Phi(\xi_0, \xi)^2 d\xi''' d\xi'' d\xi' + b_v \int_{\xi_0}^1 \int_{\xi_0}^{\xi'} \frac{1}{k(\xi'')} \int_{\xi''}^1 k(\xi''') \Phi(\xi_0, \xi) d\xi''' d\xi'' d\xi'}{\int_{\xi_0}^1 \int_{\xi_0}^{\xi'} \frac{1 - \xi''}{k(\xi'')} d\xi'' d\xi'} \quad (18)$$

これにより未知数 c_v が決まり、これを (16) 式に代入することで水深方向の流速分布が得られる。なお、上記に示した方法をと全く同様な方法で流下方向流速の水深方向分布を求めることができる。この結果を Appendix に示す。

以上の考え方は 2 次元浅水流モデルから得られた水深平均流速に、流速分布の一次近似として対数-放物則を仮定し、3 次元の横断方向および流下方向の運動方程式に代入し、対数-放物則からはずれる部分を計算することで 2 次流を算出しようとするものである。

以上の計算は一見複雑そうであるが、 a_v 、 b_v 、 c_v は一度計算してしまえば定数的扱いをするものであり、 $\Phi(\xi_0, \xi)$ にしても一定の分布形である対数-放物則 ((8) 式) を仮定しているにすぎない。もしこのような形で 2 次流の効果を見込むことができるならば非常に簡単な方法により河床付近の正確な流速を算出できることとなる。

5 実験値および対数則との比較

モデルの有効性を確かめるため、計算結果と実験結果との比較を行う。また、2 次元モデルとの比較も同時に行うために 2 次元浅水流モデルで得られる水深平均流速に対して次式の対数則により水深方向分布を計算した場合の結果についても同時に比較を行うこととする。

$$u = U' \Phi'(\xi_0, \xi), \quad v = V' \Phi'(\xi_0, \xi) \quad (19)$$

対数分布と実験値の比較 (1) 水制上流側 12cm 本モデルと実験値の比較

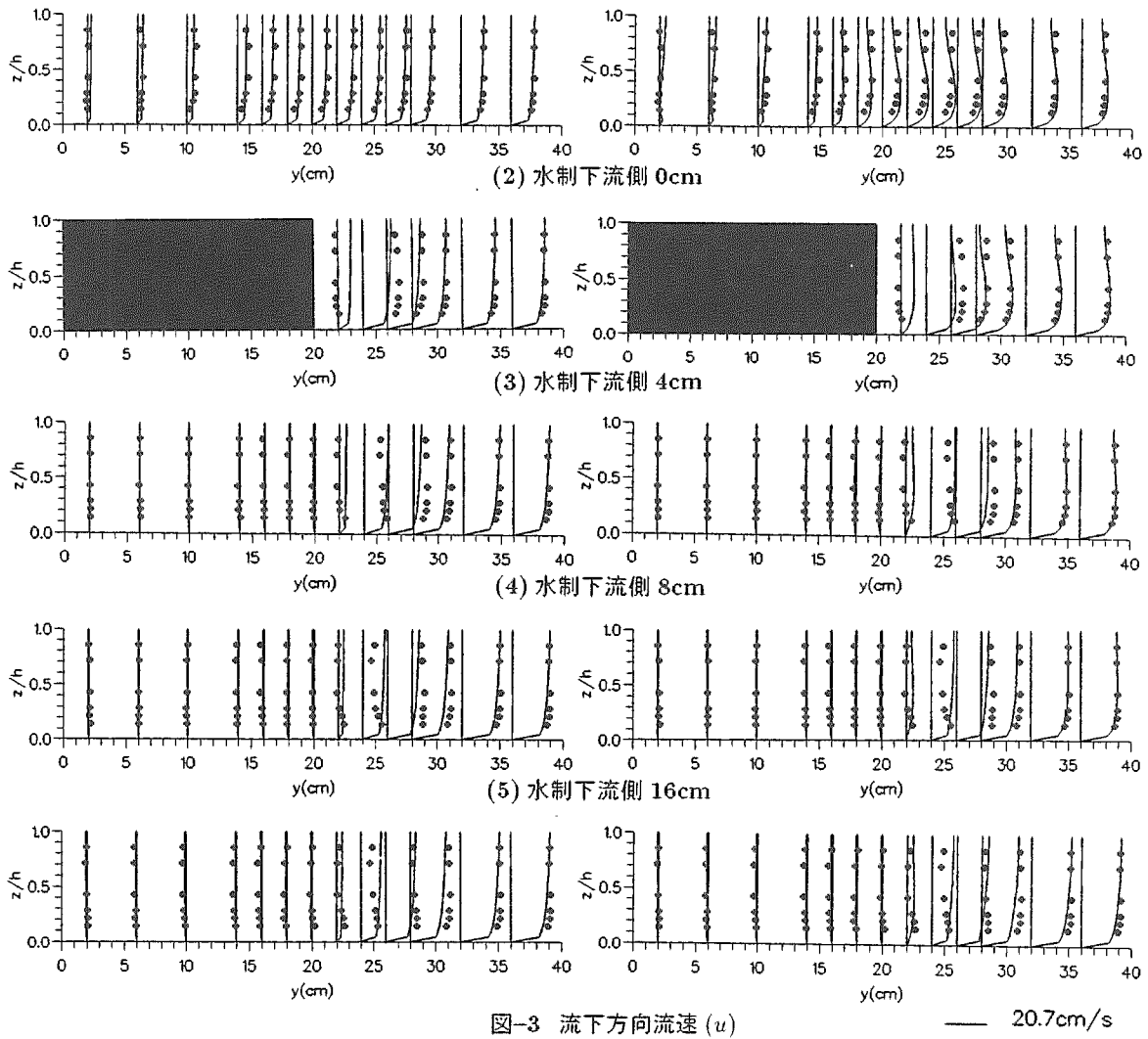


図-3 流下方向流速 (u)

— 20.7cm/s

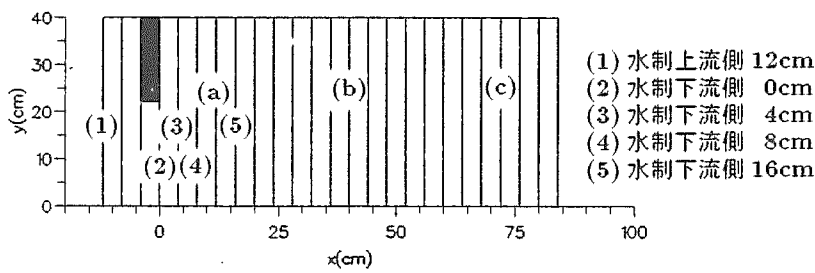


図-2 実験平面図

水路延長	700cm
水路幅	40cm
下流端水位	7cm
測定水路延長	100cm
測定水路勾配	1/1000
水制 長	20cm
水制 幅	4cm
実験流量	1.87ℓ/s

表-1 実験条件

ここで $\Phi'(\xi_0, \xi)$ は対数則の場合 $(\ln \xi / \xi_0) / (\ln(1/\xi_0) - 1)$ で表される。

実験平面図、実験条件をそれぞれ図-2、表-1に示す(なお、詳細な実験方法、実験条件等は参考文献4)、5)を参照)。

図-3に流下方向流速 u の実測値を対数則分布による計算結果および本モデルによる計算結果との比較して示す。また、図-4は横断方向流速 v の実験値を対数則分布と本モデルの計算結果比較して示す。ここで、黒丸は実測値、実線がそれぞれの計算結果である。いずれの図も上流から下流に向かって横断面を表しており、左岸側から水制が張り出した状態である。図-3の u は流下方向側が正であり、図-4の v は右岸側に向かう方向が正である。

対数分布と実験値の比較 (1) 水制上流側 12cm 本モデルと実験値の比較

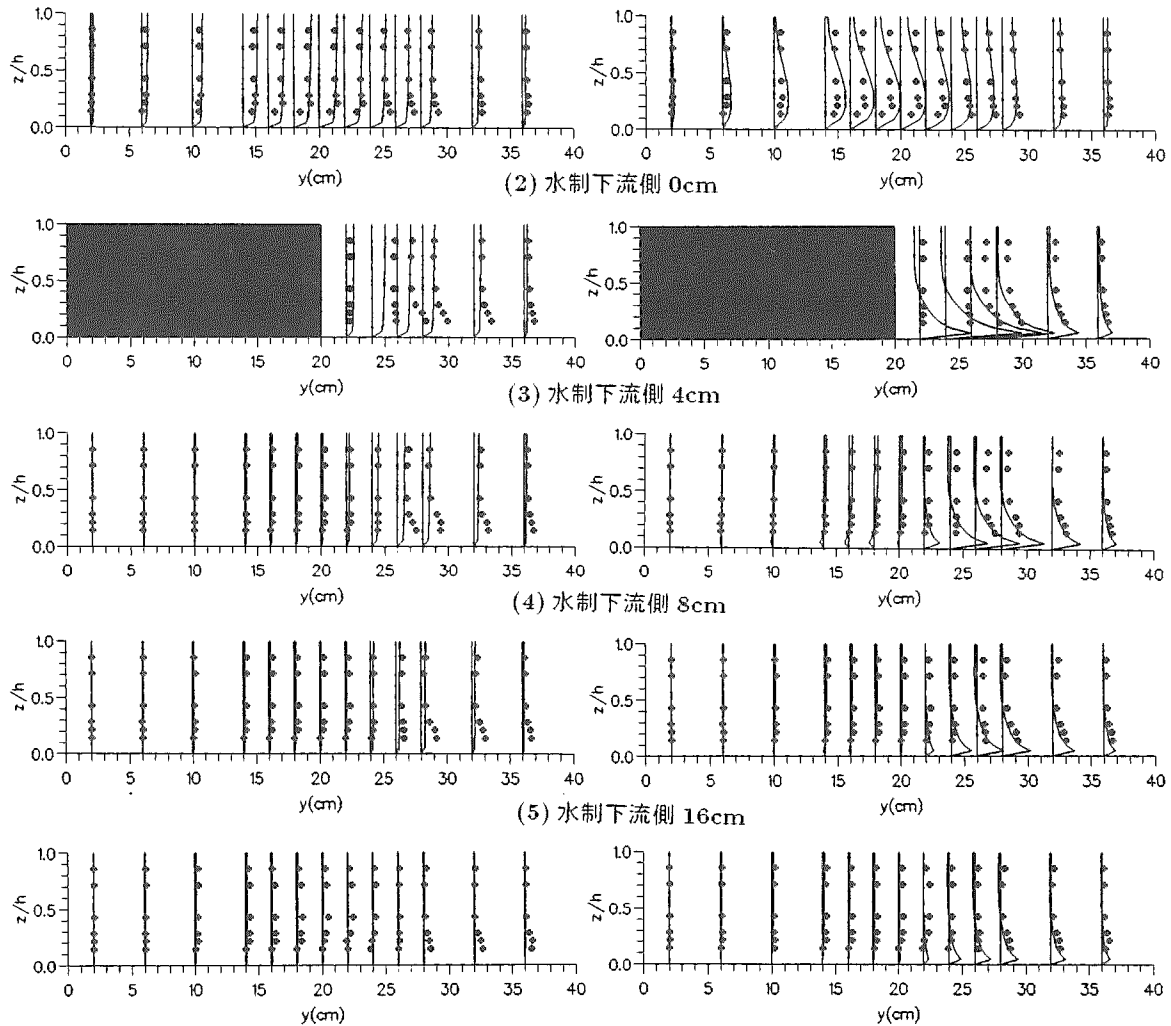


図-4 横断方向流速 (v) — 13.5cm/s

最初に図-3の流下方向流速 u について検討を行う。(1)の水制上流12cm断面において本モデルの計算結果は右岸水路壁近傍(水制設置の反対側)の流速が河床付近では実験値より若干大きめに、また表面付近では若干小さめの値となっており、対数分布の方が多少ではあるが精度が良い結果となっている。しかしながら、水制上流部での加速域において河床付近の流速が表面付近よりも速くなる傾向は本モデルによりその特徴が良く表されている。左岸側の実測値は表面付近と河床付近の流向が逆になっており、これは水制による急激な減速により生ずるものと考えられ、この特徴も良く再現されている。(2)の水制下流側0cm断面においても本モデルは対数則にくらべ河床付近を含む水深全体について良い再現性を示している。(3)の水制下流4cm断面もこれと同様の傾向が見られる。特に左岸側から18cm及び20cmの地点(水制の背後)においては剥離域の特徴でもある表面付近と河床付近で流速が逆向きになる現象を非常に良く表している。(4)、(5)の水制下流8cm、16cm断面においても河床付近での流速の計算精度は非常に高い。

続いて図-4の横断方向流速 v について検討を行う。(1)の水制上流12cm断面においては水制により曲げられた流れにより2次流が生じ、これが水深平均流に加算されることにより河床付近で異状に膨らんだ流速分布となっている。この現象は当然対数則では表現出来ず、これに対して本モデルではこの特徴を良く表わしている。(2)~(5)の水制先端部より下流の断面における v の特徴は、水制背後の水平剥離面を境に左右岸反対の向きの2次流が発生していることである。これは水平剥離面から左岸側(水制の背後)および右岸側(水制の対岸側)に別れながら加速する流れによるものと考えられ、この流れそのものは微小なものであるが、横断方向の加速度としては2次流を発生させるのに十分な大きさと考えられる。この結果、河床付近の流向で言うと水制背後で剥離域に入り込もうとする流れと、剥離域の外側で剥

離域からさらに外へ向かう流れが卓越するものと考えられる。本モデルはこのような2次流の特性を見事に再現している。ただ、(2)の水制先端部においては本モデルの再現性はあまり良くない。清水⁶⁾は2次元モデルの精度上の問題として、「水制などの横断構造物を含む計算において、特に構造物周辺における局所的な再現性が悪い。」と指摘しており、本モデルも2次元浅水流モデルで求めた平均流速 U, V を基本としているため、この部分の精度は悪いものと考えられる。

6 おわりに

本計算モデルを2次元モデルに取り込むことで3次元数値計算モデルを用いなくとも構造物周辺の流れ、特に2次流による河床付近の流れの特性を非常に良く予測することが可能となった。河床付近の流れの特性は流砂量の計算上非常に重要であり、今後河床変動の計算への応用が期待される。特に、河床が変化する条件においては水深方向の計算格子の配置法などの点で3次元モデルを用いることは非常に難しく、これに対し本モデルは基本的に2次元モデルであり、水深方向の分布形は半解析的に求まるので、河床変動の計算においても有力なモデルになると期待される。また、今回は湾曲河道における2次流現象の検証は行っていないが本モデルを使用すればほぼ同様に高精度で予測することが可能と考えられる。

今後の課題として、今までは構造物背後の流れや土砂輸送の原因と考えられる乱流拡散現象^{3),4),5)}による水平混合と本研究で扱ったような2次流による鉛直混合現象を別々に評価し数値解析に適用してきたが、実際はこれらの現象が相互にどのような関係を持ち流れの構造を決定しているかを明らかにする必要がある。

謝辞

本モデルで行っている2次流の計算方法に関して、米国USGSのDr.Jonathan Nelsonの熱心な討議をいただいた。記して謝辞にかえる次第である。

参考文献

- 1) Dr. Hermann Schlichting; "Boundary-Layer Theory", McGraw-hill Classic Textbook Reissue Series
- 2) 柿崎恒美, 長谷川和義: 水制のある開水路中の横断運動量拡散係数の測定, 土木学会水理講演会, 第36回, pp.281 ~ 286, 1992
- 3) 崇田徳彦, 清水康行, 北條紘次: 水制を含む流れの実験的研究, 北海道支部論文集, 第48号, pp.353 ~ 358, 1992
- 4) 崇田徳彦, 清水康行: 水制を含む流れに関する研究, 北海道開発局開発土木研究所月報, 第471号, pp.2 ~ 15, 1992
- 5) 崇田徳彦, 清水康行: Reynolds 応力を考慮した水制を含む流れの計算, 土木学会水理講演会, 第37回 1993 投稿中
- 6) 清水康行: 沖積河川における流れと河床変動の予測手法に関する研究, 北海道大学審査学位論文 pp.1 ~ 197, 1991
- 7) 吉川秀夫: 流砂の水理学, 丸善, pp.221 ~ 247, 1985
- 8) Rattray, M. and Mitsuda, E.; "Theoretical Analysis of Condition in a Salt Wedgw.", Estuarine and Coastal Marine Science, Vol.2, pp.373 ~ 394, 1974

(Appendix)

$$u = - \left[a_u \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{k(\xi')} \int_{\xi'}^1 \Phi(\xi_0, \xi)^2 d\xi'' d\xi' + b_u \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1}{k(\xi')} \int_{\xi'}^1 k(\xi'') \Phi(\xi_0, \xi) d\xi'' d\xi' + c_u \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{1 - \xi'}{k(\xi')} d\xi' \right] \quad (20)$$

ここで、

$$a_u = \frac{h^2}{K_0} \left(U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (21)$$

$$b_u = - \frac{h^2}{K_0} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(K_0 \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_0 \frac{\partial U}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0 \frac{\partial U}{\partial x} \right) \right] \quad (22)$$

$$c_u = \frac{-U + a_u \int_{\xi_0}^1 \int_{\xi_0}^{\xi'} \frac{1}{k(\xi'')} \int_{\xi''}^1 \Phi(\xi_0, \xi)^2 d\xi''' d\xi'' d\xi' + b_u \int_{\xi_0}^1 \int_{\xi_0}^{\xi'} \frac{1}{k(\xi''')} \int_{\xi''}^1 k(\xi''') \Phi(\xi_0, \xi) d\xi''' d\xi'' d\xi'}{\int_{\xi_0}^1 \int_{\xi_0}^{\xi'} \frac{1 - \xi''}{k(\xi'')} d\xi'' d\xi'} \quad (23)$$