

一般曲線座標系を用いた常・射流混在流れの計算

Computation of Co-existing Super-critical and Sub-critical Flows
In a Generalized Curvilinear Co-ordinate System

清水康行* 山下恭正** 山下彰司*** 崇田徳彦***

Yasuyuki SHIMIZU, Yasumasa YAMASHITA,

Syouzi YAMASHITA and Naruhiko MUNETA

本報文は、任意の河道形状を有する水域における流れを高精度な有限差分法により数値解析することを目的として行うものであり、一般曲線座標系での2次元のSt.Venant浅水流方程式を基礎式として、MacCormack法を用いた流れの数値解析法について述べるものである。

上記モデルの適用は常・射流混在場を対象として、床止工を含む実験水路や河幅が漸変する急流河川について行い、その有効性を明らかにした。

《洪水流；急流河川；一般曲線座標系；MacCormack法》

This paper describes a numerical solution to the two-dimensional St. Venant shallow water equations in a generalized co-ordinate system with the MacCormack method, for the numerical simulation of flow in geometric river channels with the accurate finite-difference scheme.

The model is applied to hydraulic model tests with still ground and rapid flow under super- and sub-critical flows conditions. The results demonstrate the validity of the model.

Keywords: flood flow, rapid flow, generalized curvilinear co-ordinate system, MacCormack method.

1. はじめに

わが国の河川は、大陸諸河川に比べその大部分が急流河川であり、下流のほんの一部に小規模なデルタが形成されている。その急流の流域に多くの人口や産業が集中しているため、綿密な治水計画が必要となり、床止工や水制工などの急流河川工法が占

める役割は非常に大きい。また、近年の治水と利水が調和した河川環境に対する配慮から、河川構造物や河道自体が複雑な形状をとる場合がある。特に急流河川や床止工を含む流れにおいては、跳水現象などが生じ流れが非常に複雑になり、現在の経験的・実験的手法のみではその水理現象が明らかにならな

*河川研究室副室長 **同室研修員(北海道開発コンサルタント(株)水工部主任技師) ***同室員

い場合が多い。これに対して、数値シミュレーションにより任意の河道形状における流れの予測が可能となれば最も有利である。

従来より、著者らは2次元浅水流方程式の差分解析法¹⁾について、直交直線座標系や直交曲線座標系上の直交格子を用いて、河川の流れの予測を行ってきた。しかし、直交格子を用いるため、地形形状の正確な表現はやや困難であり、計算中に境界条件を一般的に組込むこともむずかしい。また、差分式上の問題から、跳水現象などを含む流れの計算においては十分な精度が期待できない。

本研究は、任意の河道形状を有する水域における常・射流混在流れを高精度な有限差分法により数値解析することを目的として行うものであり、一般曲線座標系での2次元のSt.Venant²⁾浅水流方程式を基礎式として、MacCormack法を用いた流れの数値解析法について述べるものである。

一般曲線座標系³⁾による有限差分法は、直交座標系にかえて地形形状に沿った一般曲線座標系を導入するので、地形形状の表現、境界条件の処理が容易になる。また、一般曲線座標系上で有限差分法により離散化するから、高精度の差分法を比較的容易に利用することができる。ここで、跳水現象などを含み局所的に流れが急変する場合に有効な有限差分法であるMacCormack法が1次元流れの計算⁴⁾や直交直線座標系における2次元流れの計算⁵⁾に適用されている。本研究において、従来のMacCormack法を一般曲線座標系においても計算可能となるように拡張を行い、急流河川や床止工を含む流れに適用してモデルの有効性の検証を行うものとする。

2. 基礎式および計算方法

2-1 St.Venantの浅水流方程式

St.Venant方程式は3次元のNavier-Stokes方程式より導かれ、以下のように保存系で表わされる。²⁾

質量保存則

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

運動量保存則 (x方向)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = E_x \quad (2)$$

運動量保存則 (y方向)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = E_y \quad (3)$$

ここで、 x, y は平面座標、 t は時間で、各保存式

中の変数は、

$$H = h(x, y, t) \\ U = u^x(x, y, t) h(x, y, t) \quad (4)$$

$$V = u^y(x, y, t) h(x, y, t)$$

$$F = (u^x)^2 h + \frac{1}{2} g h^2$$

$$G = u^x u^y h \quad (5)$$

$$S = (u^y)^2 h + \frac{1}{2} g h^2$$

E_x, E_y は、

$$E_x = gH(S_{0x} - S_{fx}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial U}{\partial y} \right) \quad (6)$$

$$E_y = gH(S_{0y} - S_{fy}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon \frac{\partial V}{\partial y} \right) \quad (7)$$

ただし、 h は水深、 U^x, U^y は x, y 方向の水深平均流速、 g は重力加速度、 ε は動粘性係数である。

また、 S_{0x}, S_{0y} は河床勾配で、 z_b を河床高とすると、

$$S_{0x} = -\frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (8)$$

$$S_{0y} = -\frac{\partial z_b}{\partial y}$$

S_{fx}, S_{fy} は河床摩擦勾配で、マニング則で表わすと、

$$S_{fx} = \frac{n^2 U \sqrt{U^2 + V^2}}{H^{10/3}} \quad (9)$$

$$S_{fy} = \frac{n^2 V \sqrt{U^2 + V^2}}{H^{10/3}}$$

ここで、 n はマニングの粗度係数である。

2-2 座標変換

流れの数値計算では、物体表面に沿った座標系を導入するのが望ましいが、一方、方程式の差分に際しては、計算領域で格子が一樣間隔の直交格子になっている方が簡便である。そこで、一般曲線座標系による有限差分法が、複雑な物体まわりの流体解析に用いられている。この方法では、デカルト座標系にかえて地形形状に沿った一般曲線座標系を導入し、その上で有限差分法で離散化するために、地形形状の表現、境界条件の処理および高精度の差分法の利用が比較的容易にできる。

本研究では、2次元の場合について取上げる。まず、物理面 (x, y) を直交直線座標、写像面 (ψ, ϕ) を一般曲線座標とし、座標変換を次式で定義する³⁾(図-1, 2参照)。

$$\begin{cases} \psi = \psi(x, y) \\ \phi = \phi(x, y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x(\psi, \phi) \\ y = y(\psi, \phi) \end{cases} \quad (11)$$

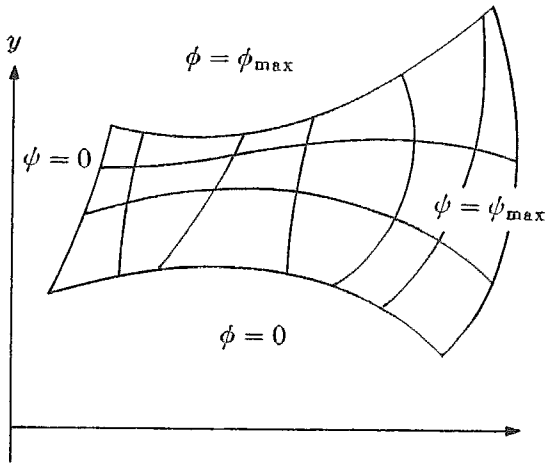


図-1 直交直線座標 (x, y)

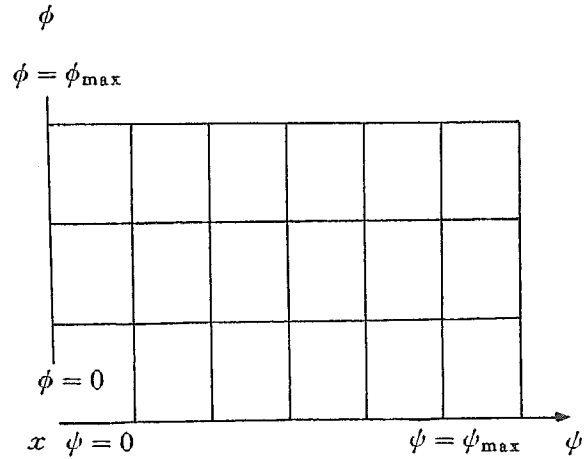


図-2 一般曲線座標 (ψ, ϕ)

これより、 x, y に関する1階偏微分は次式の関係で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &= \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} + \phi_x \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ &= \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} + \phi_y \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \psi_x &= \frac{\partial \psi}{\partial x}, & \phi_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ \psi_y &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, & \phi_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (13)$$

直交直線座標系における全微分 (dx, dy) から、一般曲線座標系における全微分 $(d\psi, d\phi)$ への変換は、次下のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} d\psi \\ d\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_x & \psi_y \\ \phi_x & \phi_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \psi_x & \psi_y \\ \phi_x & \phi_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d\psi \\ d\phi \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \phi_y & -\psi_y \\ -\phi_x & \psi_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\psi \\ d\phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15)$$

ただし、 J は座標変換のヤコビアンで、

$$J = \psi_x \phi_y - \psi_y \phi_x \quad (16)$$

である。一方、 $(d\psi, d\phi)$ から (dx, dy) への変換式は、

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\psi & x_\phi \\ y_\psi & y_\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\psi \\ d\phi \end{bmatrix} \quad (17)$$

と表わされる。ただし、

$$x_\psi = \frac{\partial x}{\partial \psi}, \quad x_\phi = \frac{\partial x}{\partial \phi}, \quad (18)$$

$$y_\psi = \frac{\partial y}{\partial \psi}, \quad y_\phi = \frac{\partial y}{\partial \phi}$$

式(15)と式(17)より、次の関係が得られる。

$$\begin{bmatrix} x_\phi & x_\phi \\ y_\phi & y_\phi \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \phi_y - \psi_y \\ -\phi_x & \psi_x \end{bmatrix} \quad (20)$$

したがって、 x_ϕ , x_ϕ および y_ϕ , y_ϕ は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} x_\phi &= \frac{\phi_y}{J}, & x_\phi &= -\frac{\psi_y}{J}, \\ y_\phi &= -\frac{\phi_x}{J}, & y_\phi &= \frac{\psi_x}{J} \end{aligned} \quad (21)$$

また、一般曲線座標 (ϕ, ψ) における流速の反変成分 u^ϕ , u^ψ は、直交直線座標 (x, y) における流速成分を u^x , u^y として次式で表わされる。

$$u^\phi = \phi_x u^x + \psi_x u^y, \quad u^\psi = \phi_y u^x + \psi_y u^y \quad (22)$$

これにより、 u^x , u^y は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} u^x &= \frac{1}{J} (\phi_y u^\phi - \psi_y u^\psi), \\ u^y &= \frac{1}{J} (-\phi_x u^\phi + \psi_x u^\psi) \end{aligned} \quad (23)$$

2-3 一般曲線座標系における St. Venant 方程式

St. Venant 方程式(1)~(3)をベクトル形式で再表示すると、以下のように表わされる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{E} \quad (24)$$

ここで、

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} h \\ u^x h \\ u^y h \end{bmatrix} \quad (25 a)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} u^x h \\ (u^x)^2 h + \frac{1}{2} g h^2 - \varepsilon \frac{\partial(u^x h)}{\partial x} \\ u^x u^y h - \varepsilon \frac{\partial(u^y h)}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (25 b)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} u^y h \\ u^x u^y h - \varepsilon \frac{\partial(u^x h)}{\partial y} \\ (u^y)^2 h + \frac{1}{2} g h^2 - \varepsilon \frac{\partial(u^y h)}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (25 c)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ g h (S_{0x} - S_{fx}) \\ g h (S_{0y} - S_{fy}) \end{bmatrix} \quad (25 d)$$

ここで S_{0x} , S_{0y} は x, y 方向の河床勾配で式(8)で表わされ、 S_{fx} , S_{fy} は x, y 方向の河床摩擦勾配はいて Manning 則で、

$$\begin{aligned} S_{fx} &= \frac{n^2 u^x \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}} \\ S_{fy} &= \frac{n^2 u^y \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}} \end{aligned} \quad (26)$$

と表わされる。

直交直線座標系における St. Venant 方程式を 2-2 の関係を用いて、一般曲線座標系に変換する。式(24)を式(23)の関係を用いて展開すると、

$$\mathbf{U}_t + \phi_x \mathbf{F}_\phi + \psi_x \mathbf{F}_\psi + \phi_y \mathbf{G}_\phi + \psi_y \mathbf{G}_\psi = \mathbf{E} \quad (27)$$

上式の両辺をヤコビアン J で除して整理すると、

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mathbf{U}}{J} \right]_t + \left[\frac{\phi_x \mathbf{F} + \psi_x \mathbf{G}}{J} \right]_\phi + \left[\frac{\phi_y \mathbf{F} + \psi_y \mathbf{G}}{J} \right]_\psi \\ - \mathbf{F} \left[\left(\frac{\phi_x}{J} \right)_\phi + \left(\frac{\psi_x}{J} \right)_\psi \right] - \mathbf{G} \left[\left(\frac{\phi_y}{J} \right)_\phi + \left(\frac{\psi_y}{J} \right)_\psi \right] \\ = \frac{\mathbf{E}}{J} \end{aligned} \quad (28)$$

ここで、式(28)の左辺第 4, 5 項は式(21)を用いて、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\phi_x}{J} \right)_\phi + \left(\frac{\psi_x}{J} \right)_\psi &= (y_\phi)_\phi + (-y_\psi)_\psi = 0 \\ \left(\frac{\phi_y}{J} \right)_\phi + \left(\frac{\psi_y}{J} \right)_\psi &= (-x_\phi)_\phi + (x_\psi)_\psi = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

である。すなわち、式(28)に式(29)を代入すると次式を得る。

$$\left[\frac{\mathbf{U}}{J}\right]_t + \left[\frac{\phi_x \mathbf{F} + \phi_y \mathbf{G}}{J}\right]_\psi + \left[\frac{\phi_x \mathbf{F} + \phi_y \mathbf{G}}{J}\right]_\phi = \frac{\mathbf{E}}{J} \quad (30)$$

ただし、

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{h}{J} \\ \frac{u^x h}{J} \\ \frac{u^y h}{J} \end{bmatrix} \quad (32 a)$$

式(30)を整理すると、式(31)~式(32)を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \psi} + \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \phi} = \mathbf{D}_\psi + \mathbf{D}_\phi \quad (31)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{u^\psi h}{J} \\ \frac{1}{J} \left[\left(u^x u^\psi h + \frac{\phi_x}{2} g h^2 \right) - \varepsilon \left\{ \phi_x \left(\phi_x \frac{\partial(u^x h)}{\partial \psi} + \phi_x \frac{\partial(u^x h)}{\partial \phi} \right) + \phi_y \left(\phi_y \frac{\partial(u^x h)}{\partial \psi} + \phi_y \frac{\partial(u^x h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \\ \frac{1}{J} \left[\left(u^\psi u^y h + \frac{\phi_y}{2} g h^2 \right) - \varepsilon \left\{ \phi_x \left(\phi_x \frac{\partial(u^y h)}{\partial \psi} + \phi_x \frac{\partial(u^y h)}{\partial \phi} \right) + \phi_y \left(\phi_y \frac{\partial(u^y h)}{\partial \psi} + \phi_y \frac{\partial(u^y h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \end{bmatrix} \quad (32 b)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{u^\phi h}{J} \\ \frac{1}{J} \left[\left(u^y u^\phi h + \frac{\phi_x}{2} g h^2 \right) - \varepsilon \left\{ \phi_x \left(\phi_x \frac{\partial(u^x h)}{\partial \psi} + \phi_x \frac{\partial(u^x h)}{\partial \phi} \right) + \phi_y \left(\phi_y \frac{\partial(u^x h)}{\partial \psi} + \phi_y \frac{\partial(u^x h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \\ \frac{1}{J} \left[\left(u^\phi u^y h + \frac{\phi_y}{2} g h^2 \right) - \varepsilon \left\{ \phi_x \left(\phi_x \frac{\partial(u^y h)}{\partial \psi} + \phi_x \frac{\partial(u^y h)}{\partial \phi} \right) + \phi_y \left(\phi_y \frac{\partial(u^y h)}{\partial \psi} + \phi_y \frac{\partial(u^y h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \end{bmatrix} \quad (32 c)$$

および

$$\mathbf{D}_\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} g h (S X_{0\psi} - S X_{f\psi}) \\ \frac{1}{J} g h (S Y_{0\psi} - S Y_{f\psi}) \end{bmatrix} \quad (32 d)$$

$$\mathbf{D}_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} g h (S X_{0\phi} - S X_{f\phi}) \\ \frac{1}{J} g h (S Y_{0\phi} - S Y_{f\phi}) \end{bmatrix} \quad (32 e)$$

ここで、

$$\begin{aligned} S X_{0\psi} &= -\phi_x \frac{\partial z_b}{\partial \psi}, & S X_{0\phi} &= -\phi_x \frac{\partial z_b}{\partial \phi} \\ S Y_{0\psi} &= -\phi_y \frac{\partial z_b}{\partial \psi}, & S Y_{0\phi} &= -\phi_y \frac{\partial z_b}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned}
SX_{f\phi} &= \frac{\phi_y}{J} u^\phi \frac{n^2 \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}}, & SX_{f\phi} &= -\frac{\phi_y}{J} u^\phi \frac{n^2 \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}} \\
SY_{f\phi} &= -\frac{\phi_x}{J} u^\phi \frac{n^2 \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}}, & SY_{f\phi} &= \frac{\phi_x}{J} u^\phi \frac{n^2 \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{h^{4/3}}
\end{aligned}
\tag{34}$$

2-4 MacCormack 差分スキーム

MacCormack 差分法を用いた一般曲線座標系での St.Venant 方程式の数値解法を、以下に示す。

n を時間ステップ, i および j を空間上の格子点番号とし, ある変量 U_{ij}^n の時刻 n における (i, j) 格子点の値を U_{ij} とする。計算上の時間刻み幅を Δt とし, U_{ij}^n の t 秒後値 U_{ij}^{n+1} を次式で求める。

$$U_{ij}^{n+1} = \left[L_\psi(\Delta t_\psi) \right]^m \left[L_\phi(\Delta t_\phi) \right]^l \left[L_\psi(\Delta t_\psi) \right]^l \left[L_\phi(\Delta t_\phi) \right]^m \tag{35}$$

ただし, L_ψ, L_ϕ は各々 ψ, ϕ 方向の差分演算子であり, $\Delta\psi, \Delta\phi$ は空間上の差分間隔である。 $\Delta t_\psi, \Delta t_\phi$

は各々 ψ, ϕ 方向の C.F.L 条件 (Courant, Friedrichs and Lewy) の条件から求められ, m および l は次式を満たす整数の組合わせである。

$$\frac{1}{2} \Delta t = m \Delta t_\psi = l \Delta t_\phi \tag{36}$$

また, 式(35)における L_ψ, L_ϕ はそれぞれ通常の MacCormack法と同様に予測子 (Predictor) と修正子 (Corrector) の 2 段階に分けて計算を行うものとし, それぞれの予測子および修正子段階における差分の方向は表-1 に掲げるとおりに行う。

表-1 各ステップにおける差分方式

第1ステップの L_ψ	予測子: 後進差分	第2ステップの L_ϕ	予測子: 後進差分
	修正子: 前進差分		修正子: 前進差分
第3ステップの L_ϕ	予測子: 前進差分	第4ステップの L_ψ	予測子: 前進差分
	修正子: 後進差分		修正子: 後進差分

表-1 に従い, 式(31)を以下のように差分化する。

《第1ステップ (L_ψ 差分演算子)》

ψ 方向予測子 (Predictor) ~ 後進差分

$$\begin{aligned}
A^p(i, j) &= A^o(i, j) - \frac{\Delta t_\psi}{\Delta\psi} \left[B^o(i, j) - B^o(i-1, j) \right] \\
&\quad + \Delta t_\psi (D_\psi^p)^o(i, j)
\end{aligned}
\tag{37}$$

ψ 方向修正子 (Corrector) ~ 前進差分

$$\begin{aligned}
A^c(i, j) &= \frac{1}{2} \left\{ A^o(i, j) + A^p(i, j) - \frac{\Delta t_\psi}{\Delta\psi} \left[B^p(i+1, j) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - B^p(i, j) \right] + \Delta t_\psi (D_\psi^c)^p(i, j) \right\}
\end{aligned}
\tag{38}$$

《第2ステップ (L_ϕ 差分演算子)》

ϕ 方向予測子 (Predictor) ~ 後進差分

$$\begin{aligned}
A^p(i, j) &= A^o(i, j) - \frac{\Delta t_\phi}{\Delta\phi} \left[C^o(i, j) - C^o(i, j-1) \right] \\
&\quad + \Delta t_\phi (D_\phi^p)^o(i, j)
\end{aligned}
\tag{39}$$

ϕ 方向修正子 (Corrector) ~ 前進差分

$$\begin{aligned}
A^c(i, j) &= \frac{1}{2} \left\{ A^o(i, j) + A^p(i, j) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\Delta t_\phi}{\Delta\phi} \left[C^p(i, j+1) - C^p(i, j) \right] \right. \\
&\quad \left. + \Delta t_\phi (D_\phi^c)^p(i, j) \right\}
\end{aligned}
\tag{40}$$

《第3ステップ (L_φ 差分演算子)》

φ 方向予測子 (Predictor) ~ 前進差分

$$A^p(i, j) = A^o(i, j) - \frac{\Delta t_\phi}{\Delta \phi} \left[C^o(i, j+1) - C^o(i, j) \right] + \Delta t_\phi (D_\phi^p)^o(i, j) \quad (41)$$

φ 方向修正子 (Corrector) ~ 後進差分

$$A^c(i, j) = \frac{1}{2} \left\{ A^o(i, j) + A^p(i, j) - \frac{\Delta t_\phi}{\Delta \phi} \left[C^p(i, j) - C^p(i, j-1) \right] + \Delta t_\phi (D_\phi^p)^p(i, j) \right\} \quad (42)$$

《第4ステップ (L_φ 差分演算子)》

ψ 方向予測子 (Predictor) ~ 前進差分

$$A^p(i, j) = A^o(i, j) - \frac{\Delta t_\psi}{\Delta \psi} \left[B^o(i+1, j) - B^o(i, j) \right] + \Delta t_\psi (D_\psi^p)^o(i, j) \quad (43)$$

ψ 方向修正子 (Corrector) ~ 後進差分

$$A^c(i, j) = \frac{1}{2} \left\{ A^o(i, j) + A^p(i, j) - \frac{\Delta t_\psi}{\Delta \psi} \left[B^p(i, j) - B^p(i-1, j) \right] + \Delta t_\psi (D_\psi^p)^p(i, j) \right\} \quad (44)$$

上式中において、上つき添字 *o*, *p* および *c* はそれぞれ前段階の計算値、予測子および修正子段階の値であることを示す。また、*D_φ* および *D_ψ* の上つき添字 *B* および *U* は、それぞれ後進差分および前進差分に対応する *D_φ* および *D_ψ* の値であり、以下のように表わされる。

$$(D_\phi^p)^o(i, j) = \begin{bmatrix} 0 \\ g \left(\frac{h(i, j) + h(i-1, j)}{2} \right) \left\{ -\phi_x \frac{z_b(i, j) - z_b(i-1, j)}{\Delta \phi} - SX_{f\phi}(i, j) \right\} \\ g \left(\frac{h(i, j) + h(i-1, j)}{2} \right) \left\{ -\phi_y \frac{z_b(i, j) - z_b(i-1, j)}{\Delta \phi} - SY_{f\phi}(i, j) \right\} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$(D_\phi^p)^p(i, j) = \begin{bmatrix} 0 \\ g \left(\frac{h(i, j) + h(i, j-1)}{2} \right) \left\{ -\phi_x \frac{z_b(i, j) - z_b(i, j-1)}{\Delta \phi} - SX_{f\phi}(i, j) \right\} \\ g \left(\frac{h(i, j) + h(i, j-1)}{2} \right) \left\{ -\phi_y \frac{z_b(i, j) - z_b(i, j-1)}{\Delta \phi} - SY_{f\phi}(i, j) \right\} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$(D_\psi^p)^o(i, j) = \begin{bmatrix} 0 \\ g \left(\frac{h(i+1, j) + h(i, j)}{2} \right) \left\{ -\phi_x \frac{z_b(i+1, j) - z_b(i, j)}{\Delta \psi} - SX_{f\psi}(i, j) \right\} \\ g \left(\frac{h(i+1, j) + h(i, j)}{2} \right) \left\{ -\phi_y \frac{z_b(i+1, j) - z_b(i, j)}{\Delta \psi} - SY_{f\psi}(i, j) \right\} \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$(D_\psi^p)^p(i, j) = \begin{bmatrix} 0 \\ g \left(\frac{h(i, j+1) + h(i, j)}{2} \right) \left\{ -\phi_x \frac{z_b(i, j+1) - z_b(i, j)}{\Delta \psi} - SX_{f\psi}(i, j) \right\} \\ g \left(\frac{h(i, j+1) + h(i, j)}{2} \right) \left\{ -\phi_y \frac{z_b(i, j+1) - z_b(i, j)}{\Delta \psi} - SY_{f\psi}(i, j) \right\} \end{bmatrix} \quad (48)$$

計算は初期条件から目的の時間が経過するまで、上記1~4のステップを繰返し行う。ここで、

定常解は計算土の変数が定常状態に収束するまで繰返し計算を行うものとする。

2-5 安定条件

2次元流れでは格子の縦横比が大きくなり、安定条件が小さい方の格子幅 $\Delta\phi$ に支配される。そこで本モデルでは部分段階法のひとつである時間分割 MacCormack法を用い、式(5)の形で計算を進める。精度は時間と空間で2次であり、安定条件は Δt が ψ 方向の安定条件 $\Delta t / 2m$ および ϕ 方向の安定条件 $\Delta t / 2\ell$ を満たすようにする。通常、本スキームの安定条件は CFL 条件によって求められ、直交直線座標系では次式により与えられる。

$$\Delta t_x = \frac{\Delta x}{C_x} = \frac{\Delta x}{|u^x| + \sqrt{gh} + \frac{2\varepsilon}{\Delta x}} \leq \frac{\Delta t}{2m'} \quad (49)$$

$$\Delta t_y = \frac{\Delta y}{C_y} = \frac{\Delta y}{|u^y| + \sqrt{gh} + \frac{2\varepsilon}{\Delta y}} \leq \frac{\Delta t}{2\ell'} \quad (50)$$

これより、一般曲線座標系における ψ 方向および ϕ 方向の安定条件は、次式のように導かれる。

$$\Delta t_\psi = \frac{\Delta\psi}{C_\psi} = \frac{\Delta\psi}{|u^\psi| + |\phi_x + \phi_y| \sqrt{gh} + \frac{2\varepsilon(\phi_x)^2}{\Delta\psi}} \leq \frac{\Delta t}{2m} \quad (51)$$

$$\Delta t_\phi = \frac{\Delta\phi}{C_\phi} = \frac{\Delta\phi}{|u^\phi| + |\phi_x + \phi_y| \sqrt{gh} + \frac{2\varepsilon(\phi_y)^2}{\Delta\phi}} \leq \frac{\Delta t}{2\ell} \quad (52)$$

2-6 境界条件

河道上流端では、上流端の流量が所与の流量になるように各時間ステップにおいて上流端の流速を調整する。河道下流端において流れが常流の場合、一定の水位条件を与えるものとする。また、水路側壁においては水路側壁に交わる方向の流速の反変成分をゼロとする。

3. モデルの適用例

3-1 床止工を含む水路の計算例

床止工を含む水路の計算例を、表-2に示す。ケース1は河床勾配 1/200 の単断面直線水路で、上流から 225 m の位置に落差 1.00 m の床止工を有する。また、ケース2は河床勾配 1/200 の複断面蛇曲水路で、上流から約 1 km の位置に落差 1.00 m の床止工を有する。その水路平面形状は、蛇行角が式(53)で表わされる sine-generated curve である。

$$\theta = \frac{\pi}{10} \cos\left(\frac{2\pi}{2000}x\right) \quad (53)$$

ただし、 θ は蛇行角 (rad)、 π は円周率、 x は水路流下方向距離 (m) である。

表-2 床止工を含む水路の計算例

計 算 ケ ー ス	ケ ー ス 1	ケ ー ス 2
	単 断 面 直 線 水 路	複 断 面 蛇 曲 水 路
流 路 延 長	500m	2,048m
流 路 幅	100m	200m
(低水路下幅)		(60m)
床止工設置場所	K P 0.275km	K P 1.00km
流 量	243.7m ³ /s	1,087.0m ³ /s
河 床 勾 配	1/200	1/200
上 流 端 水 位	4.30m	(14.47m)
下 流 端 水 位	(0.80m)	3.00m
低水路粗度係数	0.020	0.030
高水敷粗度係数	—	0.050

表-3 水理実験条件

流路延長	17.94m (x=10.00~27.94m)
流路副	3.20m
床止工設置場所	上流より18.24m (SP10.700m)
流量	0.80 ℓ/s
河床勾配	1/180
上流端水位	(0.214m)
低水路粗度係数	0.016
高水敷粗度係数	0.023

各ケースとも計算は表-2に示す条件で、初期条件として全計算区間において等流条件の水位および流速を与え、流れがほぼ定常となるまで時間進行を行った。ケース1は200秒経過後、流れが定常状態に達した。一方、ケース2は250秒経過後、流れがほぼ定常状態した。

ケース1の計算結果を図-3の流速、フルード数および水位縦断面図に、図-4の流速ベクトル図に示す。ここで、流速 V およびフルード数 Fr は水路中央の値である。図-3の水位縦断面図からもわかるように、床止工を含む水路の流れは跳水現象を伴い、非常に複雑なものとなっている。段落ち部上流 ($x=325 \sim 500$ m) ではフルード数 1.1 程度の射流流れであるが、段落ち部 ($x=250$ m) において急激なフルード数の変化が見られ、これに伴い急激な流速変化が生じている。段落ち部下流 ($x=150 \sim 250$ m) では、跳水の影響で緩やかに等流水深に漸近している。

また、ケース2の計算結果を図-5の流速、フルード数および水位縦断面図に、図-6に流速ベクトル図を示す。図-5の水位縦断面図には実線で低水路平均水位を、一点鎖線で左岸水位、二点鎖線で右岸水位を示したが、それぞれ水路蛇曲や床止工の影響を受け、非常に興味深い流れとなっている。低水路の流れを見ると、段落ち部上流 ($x=1.100 \sim 2.000$ km) ではフルード数が 0.9 程度の常流流れであるが、段落ち部 ($x=1.000$ km) において急激なフルード数や流速の変化が見られ、低水路水位が河岸より下にもぐり込んでいる。段落ち部下流 ($x=0.900 \sim 1.000$ km) では跳水現象を起こし、さらに下流では再び常流となり、流れは比較的安定している。高水敷の流れを見ると、湾曲部 ($x=0.500$ km, 1.500 km 付近) で外岸側水位が内岸側水位より高く、蛇行水路の特徴をよく表わしている。また、床止工付近では高水敷に乗った水はそのまま流れるが、低水路水位がもぐり込んでいるために河岸近傍で高水敷から低水路に向かう流れが生じている。

3-2 実験水路における計算例

本モデルを実験水路に適用して、その妥当性を検証する。実験は河床勾配 1/180 の複断面直線水路で、上流から 18.24 m の位置に落差 0.03 m の床止工を有する。本水理実験の条件を表-3に示す。

計算は表-3の条件で、初期条件として全計算区間において等流条件の水位および流速を与え、流れがほぼ定常となった 30 秒経過後の流速および水位を求めた。計算結果を図-7の流速、フルード数、水位縦断面図および図-8の流速ベクトル図に示す。図-7において、流速 V およびフルード数 Fr は低水路中央の値である。

図-7の水位縦断面図からもわかるように、床止工を含む複断面水路の流れは低水路および高水敷でそれぞれ別々の挙動を示し、非常に特徴がある。低水路の流れを見ると、断落ち部では急激なフルード数や流速の変化が生じ、それに伴って低水路水位が河岸より下にもぐり込んでいる。段落ち部下流では跳水現象が生じ、再び等流水位に漸近していつている。また、高水敷の流れを見ると、床止工付近では高水敷に乗った水はそのまま流れるが、低水路水位がもぐり込んでいるために河岸近傍で高水敷から低水路へ向かう流れが生じている。実験値を計算結果と比較してみると、段落ち部での低水路水位のもぐり込み、左右岸水位の独立性や流速・フルード数の急激な上昇など、跳水を伴う複雑な流れをほぼ正確に再現している。

3-3 実河川における計算例

対象河川は豊平川とし、適用区間は河床勾配 1/500~1/100の中上流部の急流区間で、途中6基の床止工を有する。対象洪水は既往最大規模である昭和56年8月洪水 $Q_p=1.417$ m³/s とし、実測値は洪水痕跡水位ならびに豊平川の 1/50 縮尺のフルード相似則模型の実験値を用いる。計算条件を表-4に示す。

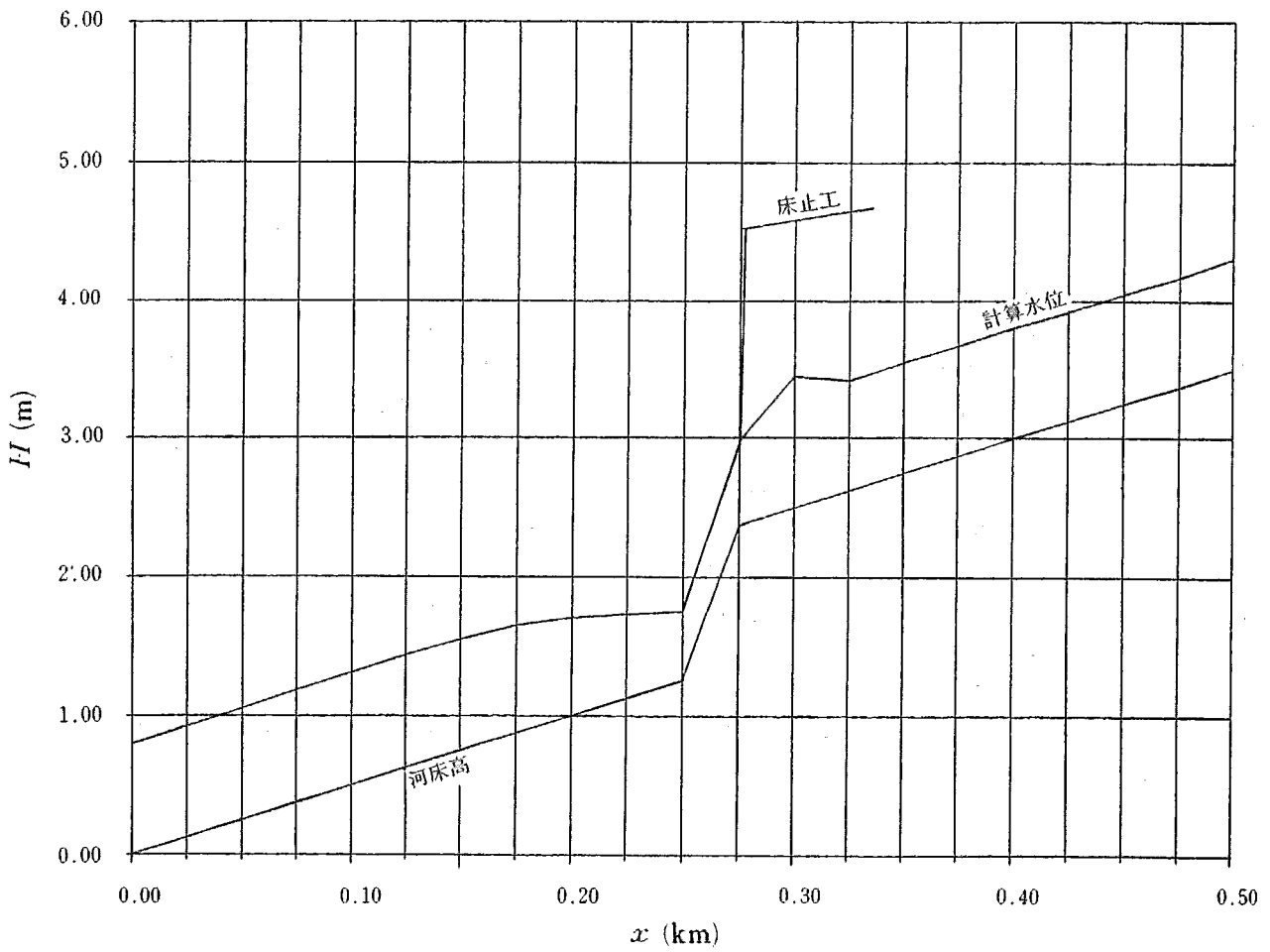
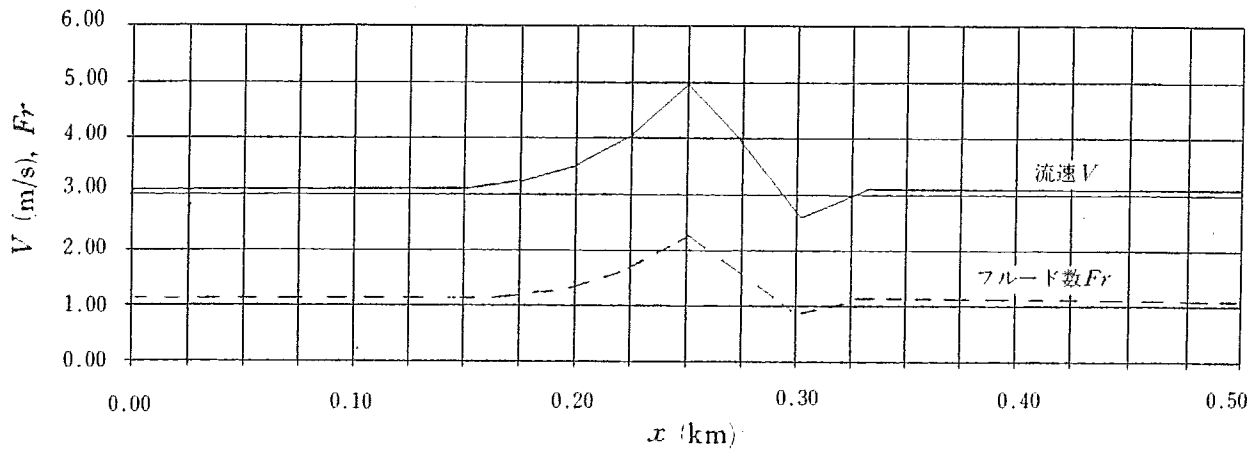


図-3 流速, フルード数, 水位縦断図 (ケース1: 単断面直線水路)

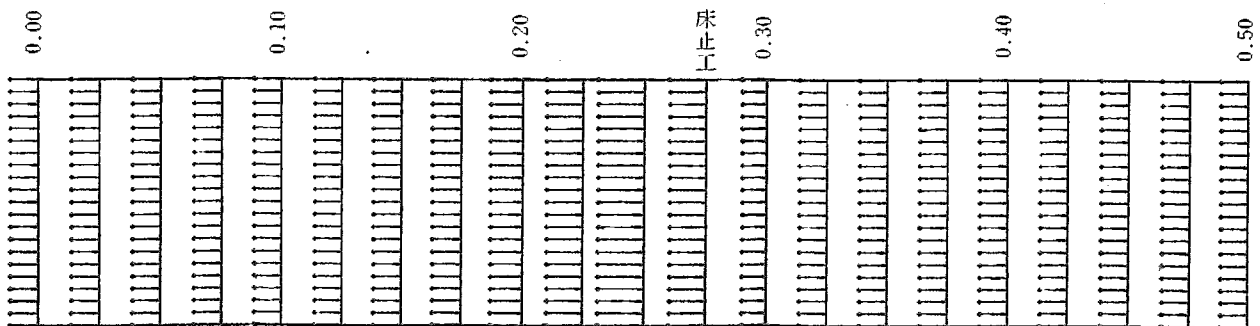


図-4 計算流速ベクトル図 (ケース1: 単断面直線水路)

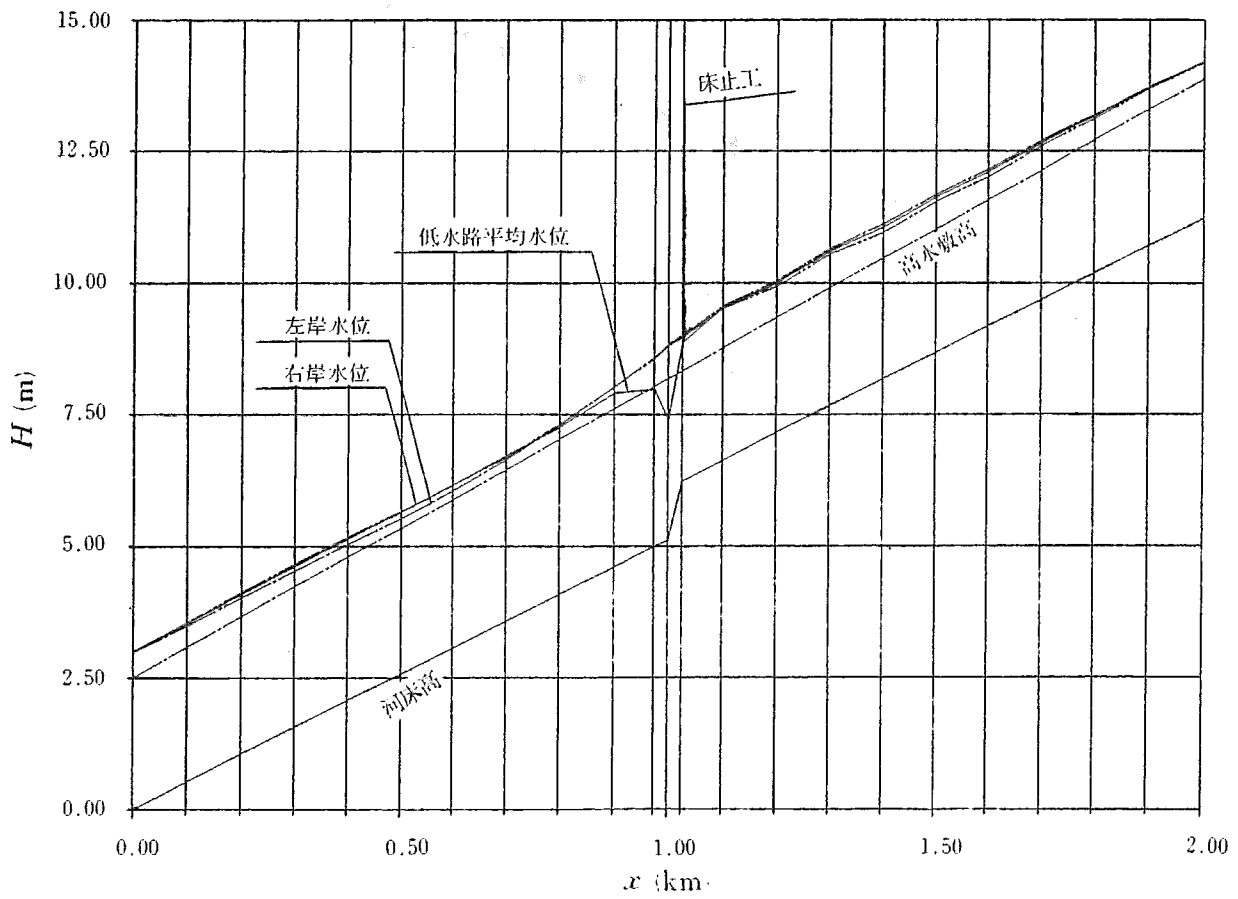
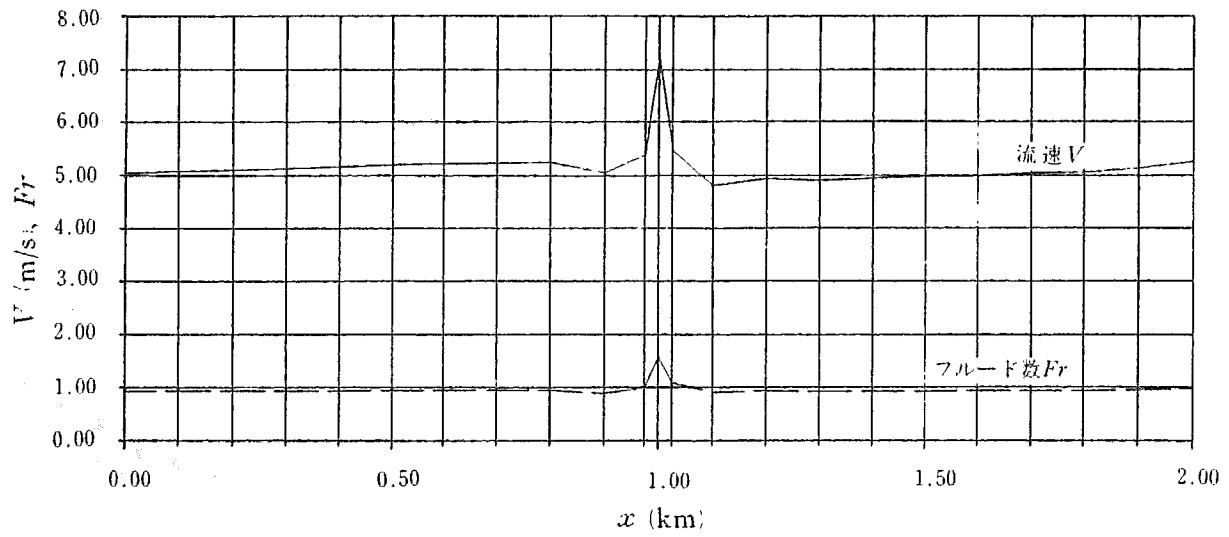


図-5 流速, フルード数, 水位縦断面図 (ケース2: 複断面蛇曲水路)

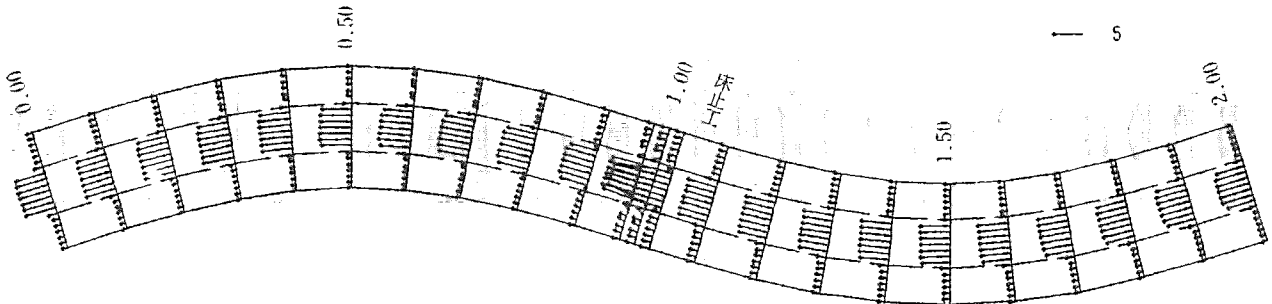


図-6 計算流速ベクトル図 (ケース2: 複断面蛇曲水路)

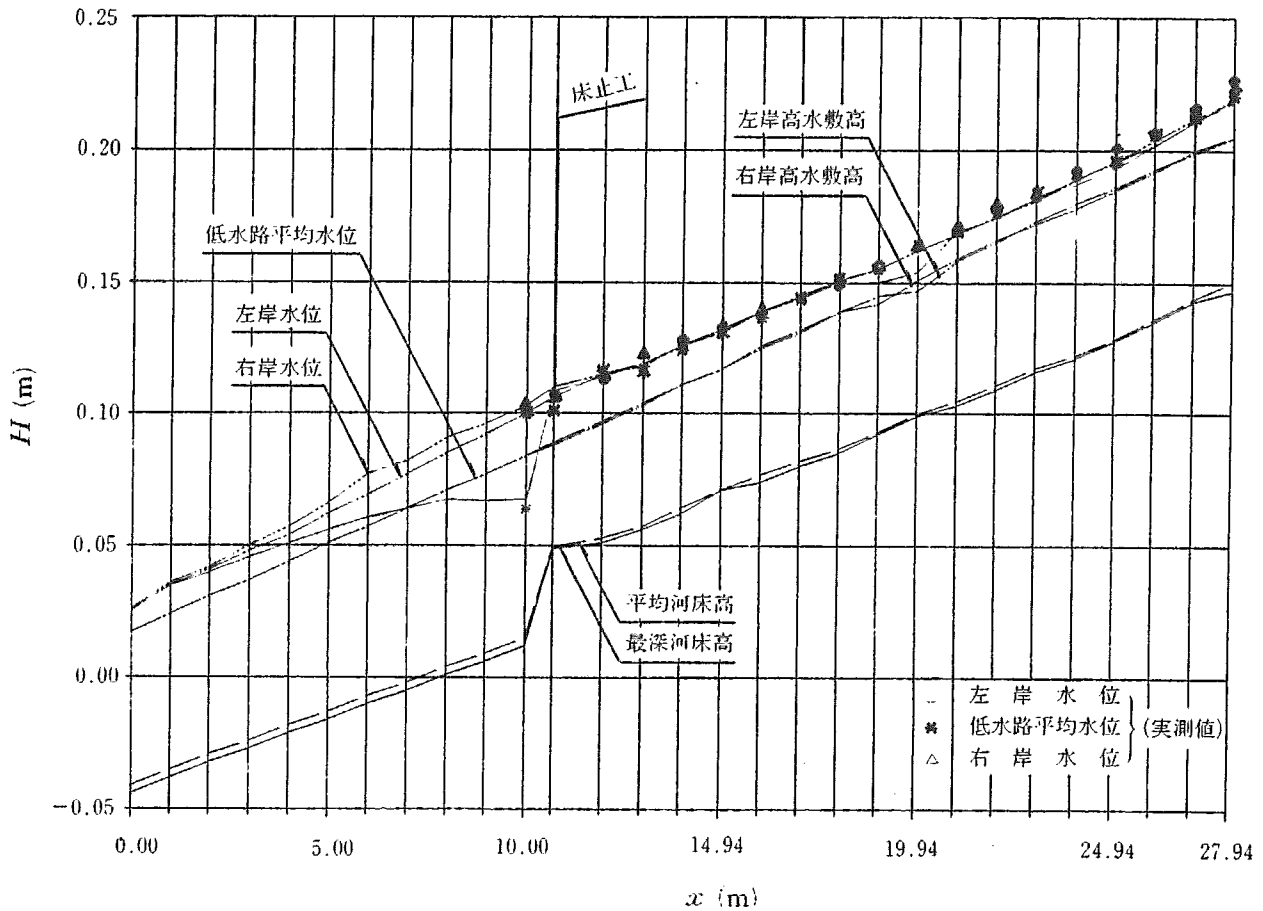
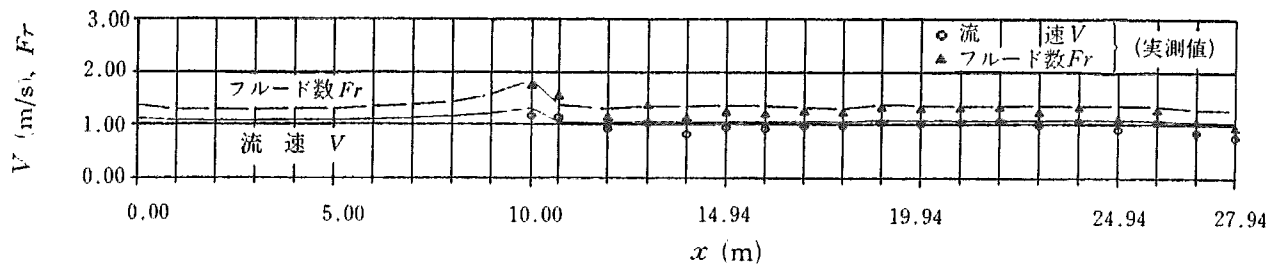


図-7 流速、フルード数、水位縦断図

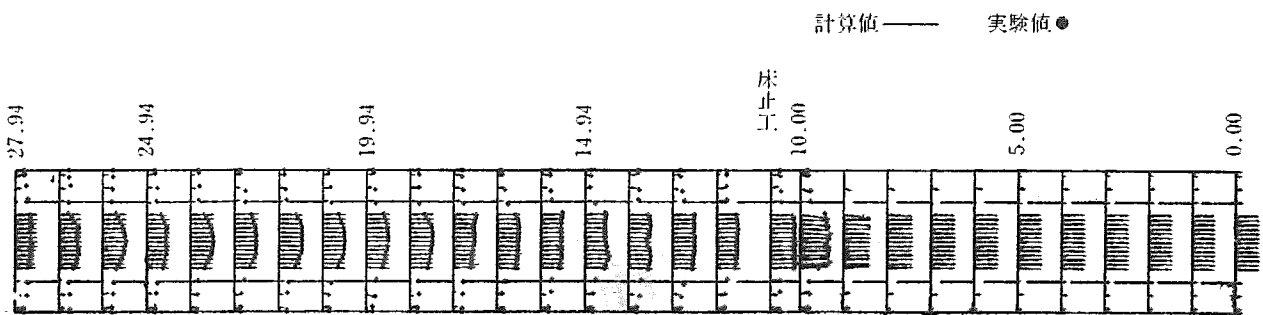
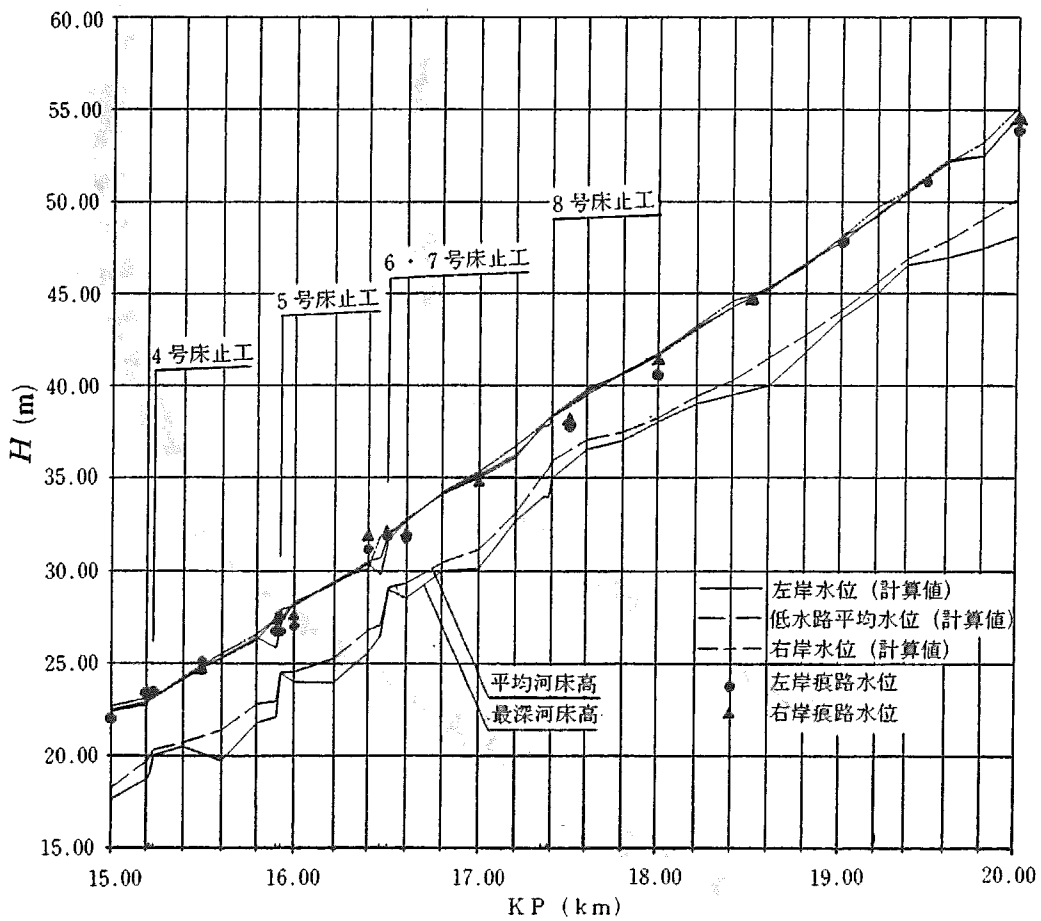
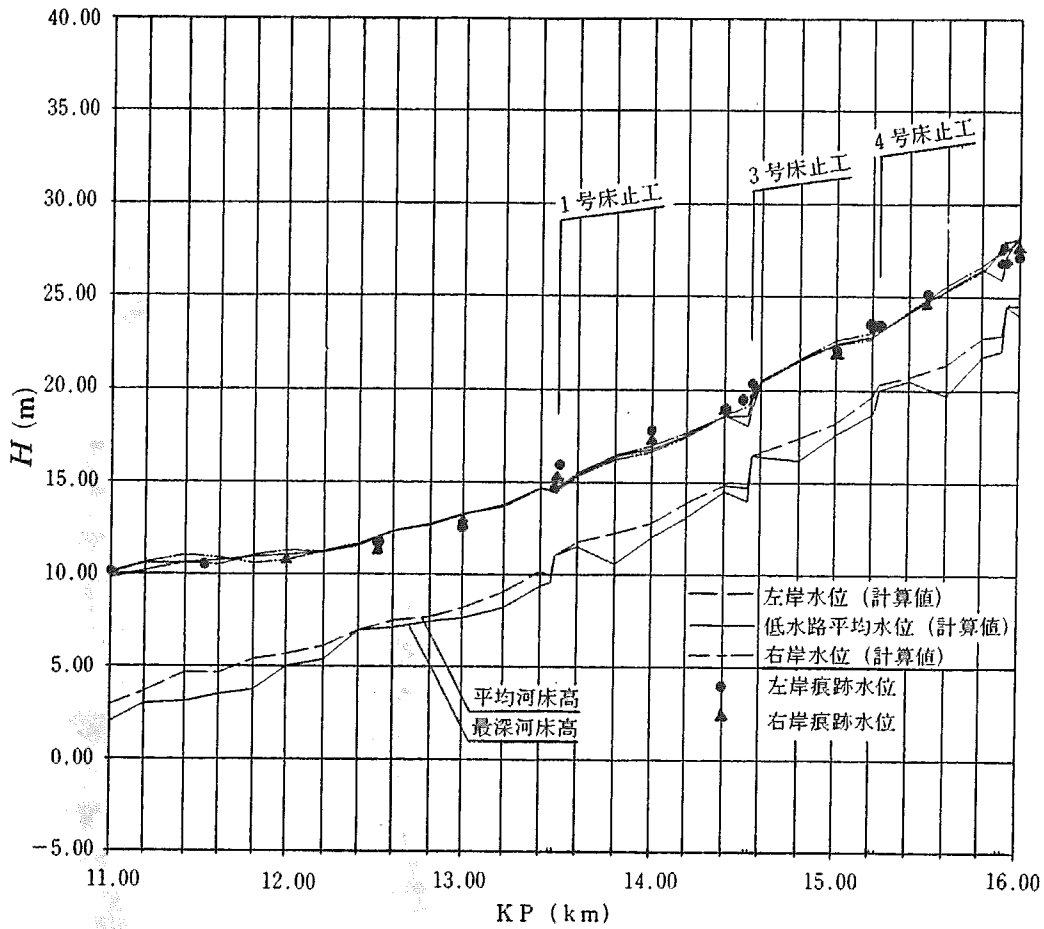


図-8 流速ベクトル図



図一9 水位縦断面図

実験値

計算値

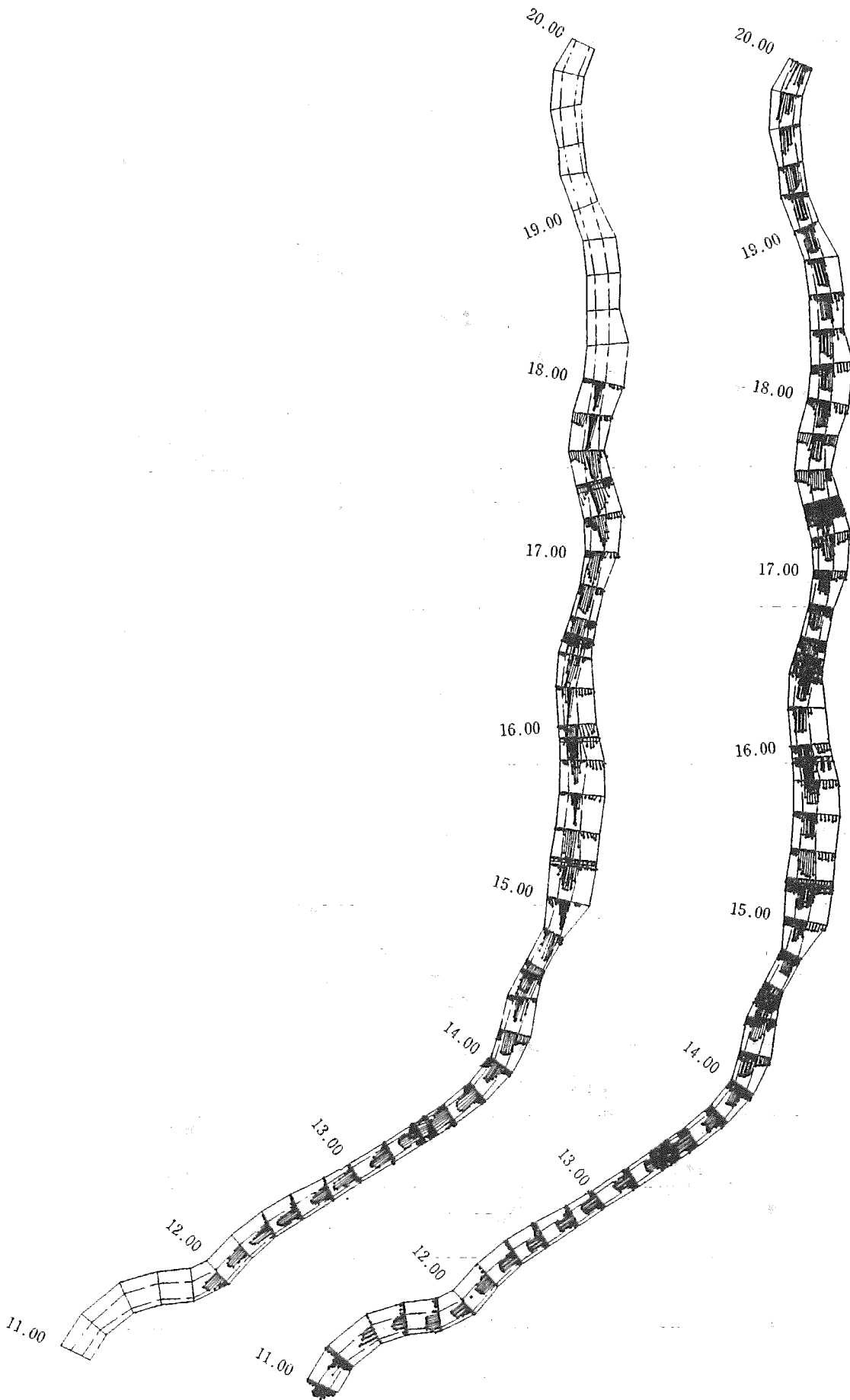


図-10 流速ベクトル図

表-4 計算区間の諸元

計算区間	豊平川K P 11.0~20.0km
流量	1,417m ³ /s
勾配	1/500~1/100
下流端水位	10.11m
低水路粗度係数	0.033
高水敷粗度係数	0.045

計算は表-4の条件で、初期条件として全計算区間において不等流計算による水位および流速を与え、流れがほぼ定常となった350秒経過後の流速および水位を求めた。さらに計算を継続したが、完全には定常状態には達しなかった。しかしながら、急流河川における跳水を伴う流れが実際にも定常状態になるかどうかは明らかでなく、今後の検討課題としたい。

図-9の水位縦断面図に、低水路平均水位と左右岸水位の計算結果を左右岸痕跡水位とあわせて示す。また、図-10の流速ベクトル図に本計算区間の実験値と計算結果の流速ベクトルを示す。

図-9の水位縦断面図や図-10の流速ベクトル図からもわかるように、豊平川本計算区間は河幅が漸変する急流蛇行河川で、途中6基の床止工を有する。その流れも湾曲部の水位上昇や跳水などの現象を受け非常に複雑なものとなっており、従来の計算法では予測が困難であった。図-9の水位縦断面図において、水位の痕跡値を計算結果と比較してみると、1号から3号床止工間で計算結果は痕跡値よりも水位低下がみられるが、左右岸水位はほぼ正確に再現されている。また、段落ち部では低水路水位のもぐり込みや高水敷の流れの独立性など跳水を伴う複雑な流れが再現されているが、跳水の生じる位置およびその規模をさらに正確に予測するためには適当な位置に内挿断面が必要と考えられる。図-10の流速ベクトル図において、流速ベクトルの実験値を計算結果と比較してみると、湾曲部外岸側への流速ベクトルの偏倚や高水敷に乗った流れが床止工下流で徐々に低水路に落込んでいることなど、流れをおおむねよく再現している。しかしながら、実験値において3号から6・7号床止工間の各床止工下流で流速ベクトルは低水路中心に偏向しており、計算結果とは適合しない個所がみられる。また、実験水路ではほぼ全川にわたって三角波が生じており、床止工の下流では衝激波も見られる。このように、急流蛇

行河川における跳水現象を含む流れは非常に複雑であり、問題点も含めさらに再現性の向上のために検討を行っていく必要がある。

4. おわりに

本報告は、任意の河道形状を有する水域における2次元流れを、一般曲線座標系やMacCormack法の導入による高精度な数値解析法について述べたものである。得られた主要な結果を示せば、以下のようである。

- (1) 一般曲線座標系における2次元のSt.Venant浅水流方程式を示した。基礎方程式は保存形で表示されており、離散化の際に物理量の保存がより正確に表現可能である。
- (2) 基礎方程式の離散化を時間分割MacCormack法を用いて、時間と空間で2次精度の差分演算子を示した。MacCormack法は跳水現象などを含み、局所的に流れが急変する場合に有効な差分法である。
- (3) 本モデルを床止工を含む実験水路や河幅が漸変する急流河川について適用し、実測値と計算結果を比較し検証することによってその有効性を明らかにした。

本モデルはまだ開発途上のものであるが、これが完成すると自然河川はもちろん、複雑な地形形状を有する流れをほぼ正確に予測が可能となるきわめて有力なモデルである。

今後、境界条件の設定法の検討、離散化法の改良、収束加速法の導入などを行って、実水域での検証を進めなければならないと考えられる。

参考文献

- 1) 清水康行, 板倉忠興; 河川における2次元流れと河床変動の計算, 土木試験所報告第85号, 昭和61年10月.
- 2) R.Garcia and R.Kawawita; Numerical solution of the St.Venant equations with the MacCormack finite-difference scheme; International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.6, 1986.
- 3) D.Anderson, J.Tannehill and R.Pletcher; Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Hemisphere Publishing Corporation, 1984.

- 4) 崇田徳彦, 清水康行, 渡邊康玄; MacCormack法を用いた常・射流計算, 開発土木研究所月報 No.448, 1990年9月.
- 5) 北條紘二, 畑 敏夫, 清水康行; 合流部における

- 2次元流況計算法について, 北海道土木学会支部, 1990年2月.
- 6) 山下彰司; 豊平川水理模型実験業務報告書, 開発土木研究所, 平成2年12月.

*

*

*