

II-18

一般曲線座標系を用いた

常射流混在流れの2次元数値計算法

北海道開発コンサルタント㈱	正員	山下 恭正
開発土木研究所 河川研究室	正員	清水 康行
北海道開発コンサルタント㈱	正員	荒井 信行
	正員	三谷 紀一

1. はじめに

我が国の河川は、大陸諸河川に比べその大部分が急流河川であり、下流のほんの一部分に小規模なデルタが形成されている。その急流の流域に多くの人口や産業が集中しているため、綿密な治水計画が必要となり、床止工や水制工などの急流河川工法が占める役割は非常に大きい。また、近年の治水と親水が調和した河川環境に対する配慮から河川構造物や河道自体が複雑な形状をとる場合がある。特に急流河川や床止工を含む流れにおいては、跳水現象などが生じ流れが非常に複雑になり、現在の経験的・実験的手法のみではその水理現象が明らかにならない場合が多い。これに対して、数値シミュレーションにより任意の河道形状における流れの予測が可能となれば最も有利である。

本研究は、任意の河道形状を有する水域における常・射流混在流れを高精度な有限差分法により数値解析をすることを目的として行うものであり、一般曲線座標系での St. Venant 浅水流方程式²⁾を基礎式として、MacCormackの差分スキームを用いた流れの数値計算法について述べたものである。

一般曲線座標系による有限差分法³⁾は、直交座標系に換えて地形形状に沿った一般曲線座標系を導入するので、地形形状の表現、境界条件の処理が容易になる。また、一般曲線座標系上で離散化するから、高精度の差分法を比較的容易に利用することができる。ここで、跳水現象などを含み局所的に流れが急変する場合に有効な有限差分法であるMacCormack法が1次元流れの計算⁴⁾や直交直線座標系における2次元流れの計算⁵⁾に應用されている。本研究においては従来のMacCormack法を一般曲線座標系においても計算可能となるように拡張を行い、急流河川や床止工を含む流れに適用してモデルの有効性の検証を行うものである。

2. 基礎式および計算方法

2-1. 座標変換

流れの数値計算では、物体表面に沿った座標系を導入するのが望ましいが、一方、方程式の差分に際しては、計算領域で格子が一樣間隔の直交格子になっている方が簡便である。そこで、一般曲線座標系による有限差分法が、複雑な物体まわりの流体解析に用いられている。この方法では、デカルト座標系に換えて地形形状に沿った一般曲線座標系を導入し、その上で離散化するために、地形形状の表現、境界条件の処理および高精度の差分法の利用が比較的容易にできる。

本研究では、2次元の場合について取り上げる。まず、物理面（ $x - y$ ）を直交直線座標、写像面（ $\psi - \phi$ ）を一般曲線座標とし、座標変換を次式で定義する³⁾（図 - 1, 2 参照）。

$$\begin{cases} \psi = \psi(x, y) \\ \phi = \phi(x, y) \end{cases} \quad \begin{cases} x = x(\psi, \phi) \\ y = y(\psi, \phi) \end{cases} \quad (1)$$

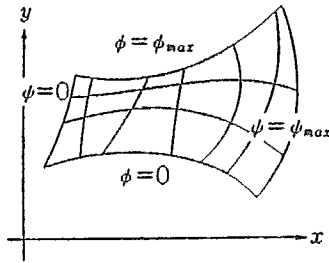


図 - 1 直交直線座標系（ $x - y$ ）

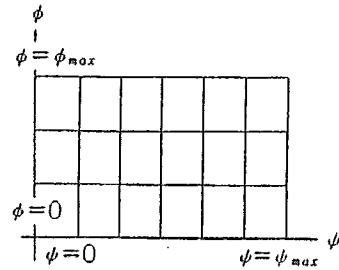


図 - 2 一般曲線座標系（ $\psi - \phi$ ）

これより、 x 、 y に関する1階偏微分は次式の関係で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} = \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} + \phi_x \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} = \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} + \phi_y \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (2)$$

直交直線座標系で書かれた St.Venant 浅水流方程式は、一般曲線座標系では(3)、(4)式のように変換される。

$$\frac{\partial \hat{U}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \psi} + \frac{\partial \hat{G}}{\partial \phi} = \hat{E} \quad (3)$$

ここに、

$$\hat{U} = \frac{U}{J} \quad \hat{F} = \frac{\psi_x F + \psi_y G}{J} \quad \hat{G} = \frac{\phi_x F + \phi_y G}{J} \quad \hat{E} = \frac{E}{J} \quad (4)$$

ただし、 ψ_x 、 ψ_y 、 ϕ_x 、 ϕ_y および J は、座標変換に係わる測度 (metrix) およびヤコビ行列式 (Jacobian) であり、以下のように表される。

$$\psi_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (5)$$

$$J = \psi_x \phi_y - \psi_y \phi_x \quad (6)$$

2 - 2. 一般曲線座標系における St.Venant 方程式

一般曲線座標系における St.Venant 方程式 (3) および (4) 式を整理すると (7) および (8) 式を得る。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial \psi} + \frac{\partial C}{\partial \phi} = D_\psi + D_\phi \quad (7)$$

ただし、

$$A = \begin{bmatrix} \frac{h}{J} \\ \frac{u^x h}{J} \\ \frac{u^y h}{J} \end{bmatrix} \quad (8a)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{u^x h}{J} \\ \frac{1}{J} \left[\left(u^x u^x h + \frac{\phi_x}{2} g h^2 \right) - \varepsilon \left\{ \psi_x \left(\psi_x \frac{\partial(u^x h)}{\partial \psi} + \phi_x \frac{\partial(u^x h)}{\partial \phi} \right) + \psi_y \left(\psi_y \frac{\partial(u^x h)}{\partial \psi} + \phi_y \frac{\partial(u^x h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \\ \frac{1}{J} \left[\left(u^y u^y h + \frac{\phi_y}{2} g h^2 \right) - \varepsilon \left\{ \psi_x \left(\psi_x \frac{\partial(u^y h)}{\partial \psi} + \phi_x \frac{\partial(u^y h)}{\partial \phi} \right) + \psi_y \left(\psi_y \frac{\partial(u^y h)}{\partial \psi} + \phi_y \frac{\partial(u^y h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \end{bmatrix} \quad (8b)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{u^x h}{J} \\ \frac{1}{J} \left[\left(u^x u^x h + \frac{\phi_x}{2} g h^2 \right) - \varepsilon \left\{ \phi_x \left(\psi_x \frac{\partial(u^x h)}{\partial \psi} + \phi_x \frac{\partial(u^x h)}{\partial \phi} \right) + \phi_y \left(\psi_y \frac{\partial(u^x h)}{\partial \psi} + \phi_y \frac{\partial(u^x h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \\ \frac{1}{J} \left[\left(u^y u^y h + \frac{\phi_y}{2} g h^2 \right) - \varepsilon \left\{ \phi_x \left(\psi_x \frac{\partial(u^y h)}{\partial \psi} + \phi_x \frac{\partial(u^y h)}{\partial \phi} \right) + \phi_y \left(\psi_y \frac{\partial(u^y h)}{\partial \psi} + \phi_y \frac{\partial(u^y h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \end{bmatrix} \quad (8c)$$

および、

$$D_\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} g h (S X_{0\psi} - S X_{r\psi}) \\ \frac{1}{J} g h (S Y_{0\psi} - S Y_{r\psi}) \end{bmatrix} \quad (8d)$$

$$D_\phi = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} g h (S X_{0\phi} - S X_{r\phi}) \\ \frac{1}{J} g h (S Y_{0\phi} - S Y_{r\phi}) \end{bmatrix} \quad (8e)$$

ここで、

$$S X_{0\psi} = -\psi_x \frac{\partial Z_b}{\partial \psi}, \quad S X_{0\phi} = -\phi_x \frac{\partial Z_b}{\partial \phi}, \quad S Y_{0\psi} = -\psi_y \frac{\partial Z_b}{\partial \psi}, \quad S Y_{0\phi} = -\phi_y \frac{\partial Z_b}{\partial \phi} \quad (9)$$

$$S X_{r\psi} = \frac{\phi_y}{J} U^\psi \frac{n^2 \sqrt{(U^x)^2 + (U^y)^2}}{h^{4/3}}, \quad S X_{r\phi} = -\frac{\phi_y}{J} U^\phi \frac{n^2 \sqrt{(U^x)^2 + (U^y)^2}}{h^{4/3}} \quad (10)$$

$$S Y_{r\psi} = -\frac{\phi_x}{J} U^\psi \frac{n^2 \sqrt{(U^x)^2 + (U^y)^2}}{h^{4/3}}, \quad S Y_{r\phi} = \frac{\phi_x}{J} U^\phi \frac{n^2 \sqrt{(U^x)^2 + (U^y)^2}}{h^{4/3}}$$

2-3. MacCormackの差分スキームと安定条件

MacCormack差分法を用いた一般曲線座標系での St. Venant 方程式の数値解法を以下に示す。

n を時間ステップ、 i および j を空間上の格子点番号とし、ある変数 U の時刻 n における (i, j) 格子点の値を $U_{i,j}^n$ とする。計算上の時間刻み幅を Δt とし、 $U_{i,j}^n$ の Δt 秒後の値を $U_{i,j}^{n+1}$ を次式で求める。

$$U_{i,j}^{n+1} = \left[L_\psi(\Delta t_\psi) \right]^m \left[L_\phi(\Delta t_\phi) \right]^l \left[L_\psi(\Delta t_\psi) \right]^l \left[L_\phi(\Delta t_\phi) \right]^m U_{i,j}^n \quad (11)$$

ただし、 L_ψ 、 L_ϕ は各々 ψ 、 ϕ 方向の差分演算子であり、 $\Delta\psi$ 、 $\Delta\phi$ は空間上の差分間隔である。 Δt_ψ 、 Δt_ϕ は各々 ψ 、 ϕ 方向のCFL条件から求められ、 m および n は次式を満たす整数の組合せである。

$$\frac{1}{2}\Delta t = m\Delta t_\psi = \ell\Delta t_\phi \quad (12)$$

$$\Delta t_\psi = \frac{\Delta\psi}{C_\psi} = \frac{\Delta\psi}{|u^\psi| + |\phi_x + \phi_y|\sqrt{gh} + \frac{2\varepsilon(\phi_x)^2}{\Delta\psi}} \leq \frac{\Delta t}{2m} \quad (13)$$

$$\Delta t_\phi = \frac{\Delta\phi}{C_\phi} = \frac{\Delta\phi}{|u^\phi| + |\phi_x + \phi_y|\sqrt{gh} + \frac{2\varepsilon(\phi_x)^2}{\Delta\phi}} \leq \frac{\Delta t}{2\ell} \quad (14)$$

また、(11)式における L_ψ 、 L_ϕ はそれぞれ通常のMacCormack法と同様に予測子(Predictor)と修正子(Corrector)の2段階に分けて計算を行うものとし、それぞれの子予測子および修正子段階における差分の方向は表・1に掲げるとおりに行う。

表・1 各ステップにおける差分方式

第1ステップの L_ψ	予測子：後進差分	第2ステップの L_ϕ	予測子：後進差分
	修正子：前進差分		修正子：前進差分
第3ステップの L_ϕ	予測子：前進差分	第4ステップの L_ψ	予測子：前進差分
	修正子：後進差分		修正子：後進差分

2・4. 境界条件および計算方法

河道上流端では、上流端の流量が所与の流量になるように各々時間ステップにおいて上流端の流速を調整する。河道下流端において流れが常流の場合、一定の水位条件を与えるものとする。また、水路側壁に交わる方向の流速の反変成分をゼロとする。

一般曲線座標系の格子形成法には、種々のものが提案されているが、新座標系が屈曲したり、不自然であったりした場合は Laplace方程式の境界値問題を解くことにより新座標系を滑らかに再配置するものとする。

計算は初期条件から目的の時間が経過するまで、表・1の1～4のステップを繰返し行う。ここで、定常解は計算上の変数が定常状態に収束するまで時間進行を行うものとする。

3. 実河川における計算例

対象河川は豊平川とし、適用区間は河床勾配 1/500～1/100 の中上流部の急流区間で、途中6基の床止工を有する。対象洪水は既往最大規模である昭和56年8月洪水 $Q_p=1,417\text{m}^3/\text{s}$ とし、実測値は洪水痕跡水位ならびに1/50縮尺のフルード相似則模型

表・2 計算区間の諸元

計算区間	豊平川KP11.0～20.0km
流量	1.417m ³ /s
こう配	1/500～1/100
下流端水位	10.11m
低水路粗度係数	0.033
高水敷粗度係数	0.045

の実験値⁶⁾を用いる。計算条件を表・2に示す。なお、計算結果を図・3の水位縦断面図および図・4の流速ベクトル図に実測値と計算結果の流速ベクトルを併せて示す。

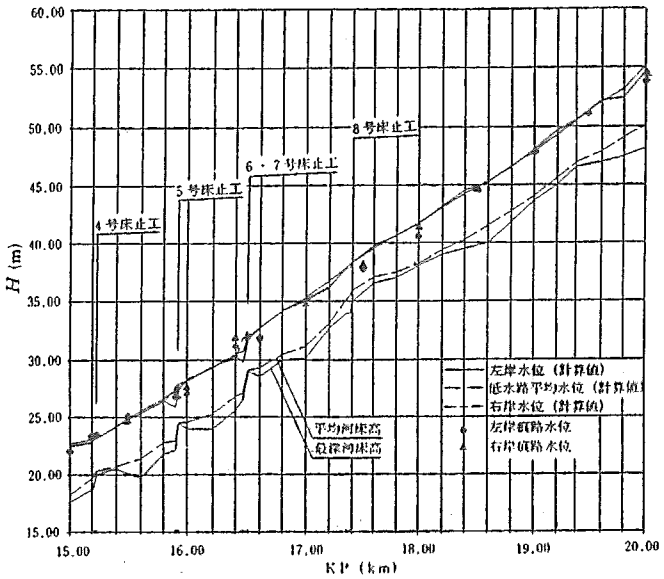
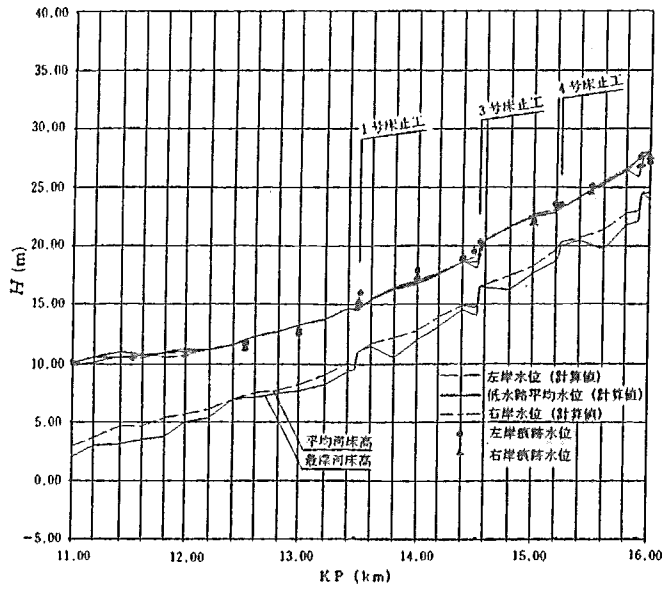


図 - 3 水位縦断図

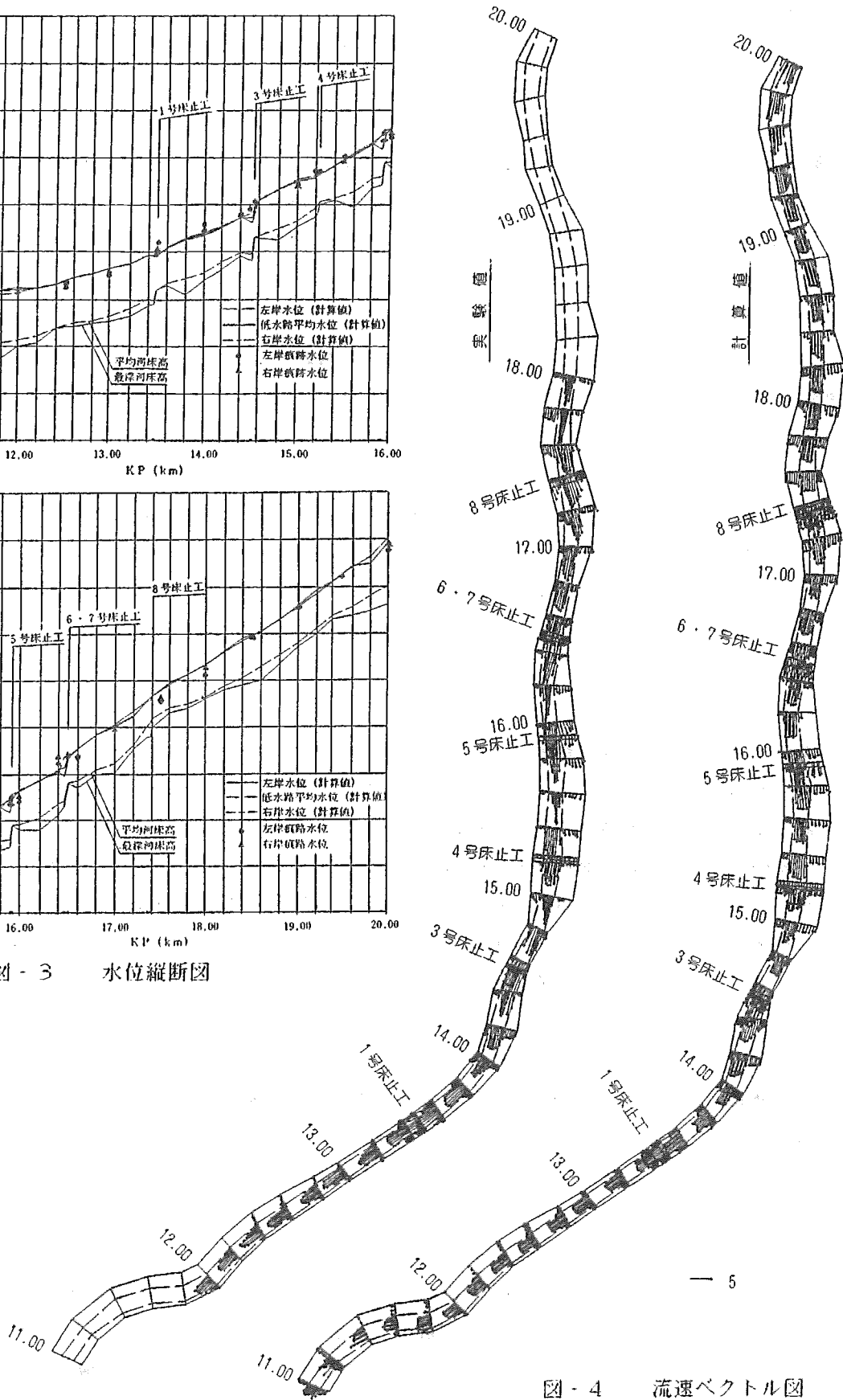


図 - 4 流速ベクトル図

計算は表 - 2 の条件で、初期条件として全計算区間において不等流計算による水位および流速を与え、流れがほぼ定常となった 350 秒経過後の水位および流速を求めた。

図 - 3 の水位縦断図や図 - 4 の流速ベクトル図からも解るように、豊平川本計算区間は河幅が漸変する急流河川で、途中 6 基の床止工を有する。その流れも湾曲部の水位上昇や跳水などの影響を受けて非常に複雑なものとなっており、従来の計算法では予測が困難であった。図 - 3 の水位縦断図において、水位の痕跡値を計算結果と比較してみると、1 号から 3 号床止工間で計算結果は痕跡値よりも水位が低いものの、計算水位は痕跡値をほぼ正確に再現している。また、段落ち部では低水路水位の潜り込みや高水敷の流れの独立性など跳水を伴う複雑な流れが再現されているが、跳水の生じる位置およびその規模をさらに正確に予測するためには、適当な位置に内挿断面が必要と考えられる。図 - 4 の流速ベクトル図において、流速ベクトルの実験値と計算値とを比較してみると、湾曲部外岸側への流速ベクトルの偏倚や高水敷に乗った流れが床止工下流で徐々に低水路に落込んでいることなど、流れを概ねよく再現している。しかしながら、実験値において 3 号から 6・7 号間の各床止工下流で流速ベクトルは低水路中央に偏向しており、計算結果とは適合しない箇所が見られる。また、実験水路ではほぼ全川にわたって三角波が生じており、床止工下流では衝撃波も見られた。

このように、急流蛇行河川における跳水現象を含む流れは非常に複雑であり、問題点を含めさらに再現性の向上のため検討を行って行く必要があると考えられる。

4. おわりに

本研究で得られた主要な結果を示せば以下のようである。

- (1) 一般曲線座標系における 2 次元の St. Venant 浅水流方程式を示した。基礎方程式は保存形で表示されており、離散化の際に物理量の保存がより正確に表現可能である。
- (2) 基礎方程式の離散化を時間分割 MacCormack 法を用いて、時間と空間で 2 次精度の差分演算子を示した。MacCormack 法は跳水現象などを含み、局所急変流に有効な差分法である。
- (3) 本モデルを床止工を有し、河幅が漸変する急流河川に適用し、実測値と計算結果とを比較検証することによってその有効性を明らかにした。

参 考 文 献

- (1) 清水康行、板倉忠興；河川における 2 次元流れと河床変動の計算、土木試験所報告第 85 号、昭和 61 年 10 月。
- (2) Garcia, R. and Kahawita, R.A. ; Numerical Solution of the MacCormack Finite-Difference Scheme, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.6, 1986.
- (3) Anderson, D.A., Tannehill, J.C. and Pletcher, R.H. ; Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Hemisphere Publishing Corporation, 1984.
- (4) 崇田徳彦、清水康行、渡辺康玄；MacCormack 法を用いた常・射流計算、北海道開発局開発土木研究所月報 1990 年 2 月。
- (5) 北条紘二、畑敏夫、清水康行；合流部における 2 次元流況計算法について、北海道土木学会支部 1990 年 2 月。
- (6) 山下彰司；豊平川水理模型実験業務報告書、北海道開発局開発土木研究所、平成 2 年 12 月。