

# 樹木の存在する河道の流況計算

開発土木研究所河川研究室 渡邊康玄  
清水康行  
山下彰司  
開発土木研究所依頼研修員 赤阪彦嘉

はじめに

近年、河川に対して水辺環境としてのうるおいやゆとり、あるいは水との触れ合い等を望む声が高まっている。これまでの河川事業においても周辺環境への配慮はなされていたが、より積極的な配慮が望まれている。この社会の要請に応える一つの方法として河川の高水敷に植栽あるいはすでに生えている樹木を残した河川計画を立案する方向に動きつつある。しかし、河道内に樹木が存在する場合、河積の減少や樹木による粗度の増加に伴う河道内の流下能力の低減、洪水時における流木の発生等、治水への悪影響が考えられる。流下能力の低減に関しては樹木群が流れにどのような影響を与えるかを、また流木に関しては樹木に働く流水力を把握する必要がある。このように河川環境（植生）を配慮した河道計画立案のためには、樹木が存在する場の流況を把握することが必要不可欠である。

本研究は、樹木群内部の流況を把握し、流れにおよぼす樹木群の影響を検討するために用いる、樹木群を含む流況計算手法を提案することを目的とする。

## 1. 樹木群内流速の水深方向分布

### 1.1 基礎式

樹木の抗力を考慮した等流の運動方程式は、(1)式で表される。

$$0 = -\bar{g} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \bar{\epsilon} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\bar{a}}{2} C_d \bar{u}^2 \quad (1)$$

ここで、 $\bar{g}$ : 重力加速度、 $\bar{H}$ : 水位、 $\bar{\epsilon}$ : 渦動粘性係数 ( $= \kappa/6 \bar{u}_* \bar{h}$ )、 $\bar{h}$ : 水深、 $\bar{u}_*$ : 摩擦速度 ( $= \sqrt{\bar{g} \bar{h} i}$ )、 $\bar{u}$ :  $\bar{x}$ 軸方向流速、 $\bar{a}$ : 樹木密度 ( $= \bar{d}/(\bar{s} \bar{l})$ )、 $\bar{d}$ : 樹木の直径、 $\bar{s}$ : 樹木の横断方向間隔、 $\bar{l}$ : 樹木の縦断方向間隔、 $C_d$ : 樹木の抗力係数、 $\kappa$ : カルマン定数である。なお、 $\sim$ の付いた変数は、有次元を示している。

水面で剪断力が無く、河床で剪断力が河床摩擦と釣り合うことから、(2)、(3)式が成り立つ。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = 0 ; \bar{z} = \bar{h} \quad (2), \quad \bar{\epsilon} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = C_b \bar{u}_b^2 ; \bar{z} = 0 \quad (3)$$

ここで、 $C_b$ : 河床の抵抗係数、 $\bar{u}_b$ : 河床における流速である。

(1)、(2)、(3)式は、 $u = \bar{u}/\bar{u}_*$ 、 $a = \bar{a} \bar{h}$ 、 $z = \bar{z}/\bar{h}$ を用いて無次元化を行うと、(4)、(5)、(6)式となる。

$$1 + \frac{\kappa}{6} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{a}{2} C_d u^2 = 0 \quad (4), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 ; z = 1 \quad (5), \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{6}{\kappa} C_b u^2 ; z = 0 \quad (6)$$

### 1.2 摂動法による近似解<sup>1),2),3)</sup>

(4)式を、(5)、(6)式の境界条件のもとで摂動法を用いて解くこととする。

$$\phi = \sqrt{\frac{a}{2} C_d} u, \quad \nu = \frac{\kappa}{6} \sqrt{\frac{2}{a C_d}}, \quad p = \nu^{-1/2} z$$

と置くと、(4)式は、

$$1 + \frac{d^2 \phi}{dp^2} - \phi^2 = 0 \quad (7)$$

となる。ここで、 $\nu/\phi = \kappa/(3uaC_d)$ であり、通常 $\nu$ が $\phi$ に比べて十分小さい値であることから、

$$\phi = \phi_0 + \nu \phi_1 + \nu^2 \phi_2 + \dots$$

と仮定し、(7)式に代入し、 $\nu$ の次数で整理すると、0次と1次に関して

$$1 + \frac{d^2 \phi_0}{dp^2} = \phi_0^2 \quad (8), \quad \frac{d^2 \phi_1}{dp^2} = 2\phi_0 \phi_1 \quad (9)$$

Yasuharu WATANABE, Yasuyuki SHIMIZU, Syouji YAMASHITA, Hikoyosi AKASAKA

が得られる。(8)式の解の1つは、

$$\phi_0 = 1$$

であり、これを(9)式に代入すると、一般解として

$$\phi_1 = C_0 \exp(\sqrt{2}p) + C_1 \exp(-\sqrt{2}p)$$

が得られる。ここで、 $C_0, C_1$ は積分定数である。よって、 $\nu$ に関して1次オーダーまでの近似解は、

$$\phi = 1 + \nu [C_0 \exp(\sqrt{2}p) + C_1 \exp(-\sqrt{2}p)]$$

となり、結局  $u$  は、

$$u = \sqrt{\frac{2}{aC_d}} + \frac{\kappa}{3aC_d} [C_0 \exp(\chi z) + C_1 (-\chi z)] \quad (10)$$

で表される。ここで、

$$\chi = \left( \frac{72aC_d}{\kappa^2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

境界条件(5)式(6)式を用いて、積分定数  $C_0, C_1$  は

$$C_0 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad C_1 = C_0 \exp(2\chi)$$

となる。ここで、

$$\alpha = \frac{2\kappa}{3a^2C_d^3} C_b [1 + 2\exp(2\chi) + \exp(4\chi)], \quad \beta = \left( \frac{32C_b}{a^3C_d^3} \right)^{\frac{1}{2}} [1 + \exp(2\chi)] - \left( \frac{8\kappa^2}{9a^3C_d^3} \right)^{\frac{1}{4}} [1 - \exp(2\chi)], \quad \gamma = \frac{12C_b}{\kappa a C_d}$$

### 1.3 近似解の適合性

摂動法で求めた流速の水深方向分布の適合性をみるために、川幅 0.4m、流路長 5.0m のアクリル直線水路を用いて、縦断方向流速の水深方向分布の測定を行った。実験は、樹木の配置パターンとして、直径 6.0mm のアクリル棒を流路全体に縦横断方向 0.08m の間隔で千鳥に配置したもの 2 ケース (case2, case3) と、川幅方向半断面に配置したもの 1 ケース (case5) について行った。なお、流路の河床はアクリル板としているが、case3 と case5 についてはアクリル板に粒径 1.8mm の砂を添付したものを河床とした実験である。流速の測定には、樹木以外の影響をなくするため、非水没型のレーザー流速計を用いた。実験の水理量を表-1に示す。

表-1 実験の諸元

	流量 l/s	水深 cm	勾配	河床抵抗係数
case 2	3.54	5.5	1/472	0.008
case 3	3.50	4.9	1/317	0.028
case 5	4.04	3.8	1/314	0.028

case2 と case3 について、実験から得られた流速と(10)式から得られる流速を比較したものが、図-1、2である。流速および河床からの高さは、それぞれ摩擦速度および水深で無次元化している。また、解析解が樹木群内の平均的な流速としてのことから、実験値は、縦横断方向間隔 2cm のメッシュで測定したものを平均した値を用いた。解析解は、河床付近で実験値よりも若干小さく水面付近で若干大きな値となる傾向がうかがえるが、その程度は小さく十分実験値を再現しているものと思われる。また、図には比較のため樹木が存在しない場合の流速分布(放物分布)を示した。さらに、樹木を水路片側のみに設置

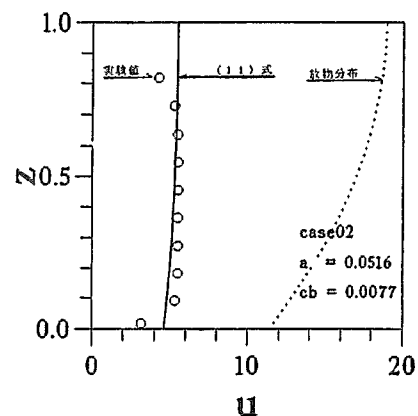


図-1 水深方向の流速分布 (case2)

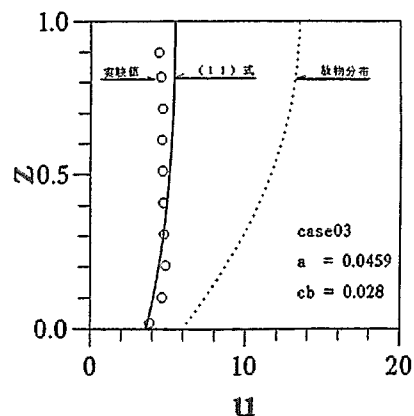


図-2 水深方向の流速分布 (case3)

し、流速分布が図-3のように測定された case5 において、樹木群内と樹木の影無箇所およびその中間での流速分布について解析解と比較したものを図-4に示した。樹木の影無箇所では放物分布で十分表現できるが、樹木の影無箇所が及ぶに従って、流速分布は、放物分布から離れ水深方向に一様化していることが明確に示されている。このように、樹木群内の流速分布は放物分布で表現できないことから、樹木群内の流速分布を把握するには、本解析解を用いる必要がある。

一方、樹木群外で樹木の影無箇所を受ける範囲の流速分布は、放物分布および本解析解による分布の中間的分布になっているものの、中央部分が出張る分布形を示しており両分布形とは明らかに異なっている。平面流況を扱ううえでは、この部分の流速分布も重要であり、樹木群が影無箇所を及ぼす範囲も含めて今後検討を進めていく必要がある。

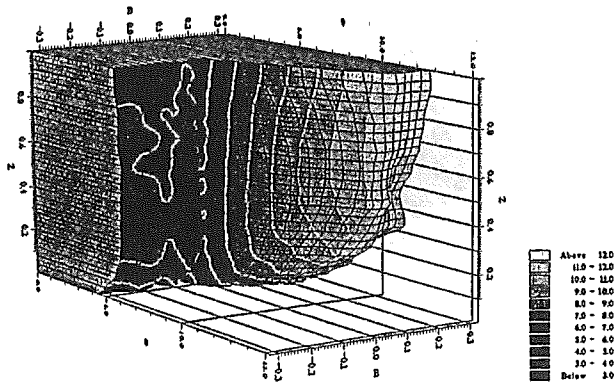


図-3 流速分布コンター (case5)

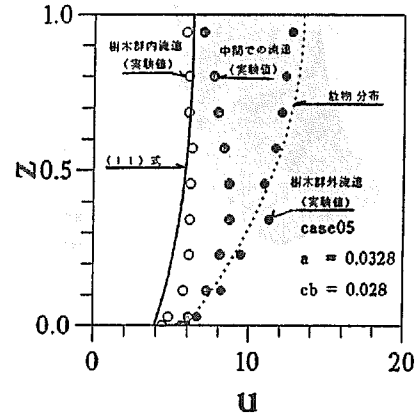


図-4 水深方向の流速分布 (case5)

## 2. 水深方向平均流速の算定

樹木群を含む河道の平面流況計算において水深方向平均流速を用いる場合、前節で確認したように樹木群内と樹木群外では水深方向の流速分布が異なることから、この影響を取り込む必要がある。樹木の抗力を考慮した等流の運動方程式である(4)式を境界条件(5)、(6)式のもとで水深方向に積分すると

$$0 = 1 - C_b u_b^2 - \frac{a}{2} C_d \int_0^1 u^2 dz$$

となる。これを、水深方向平均流速  $\langle u \rangle$  で表現すると

$$0 = 1 - C_f' \langle u \rangle^2 - \frac{a'}{2} C_d \langle u \rangle^2 \quad (11)$$

であるから、摩擦係数  $C_f$  および樹木群の密度パラメータ  $a$  は、 $C_f'$ 、 $a'$  と変化し、

$$C_f' = C_b \frac{u_b^2}{\langle u \rangle^2}, \quad a' = \frac{a \int_0^1 u^2 dz}{\langle u \rangle^2}$$

となる。また、(10)式より、

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{2}{aC_d} - \frac{\kappa}{3aC_d\chi}} u_b [1 - \exp(2\chi)], \quad u_b = \sqrt{\frac{2}{aC_d} + \frac{\kappa}{3aC_d}} C_0 [1 + \exp(2\chi)]$$

であるから、

$$C_f' = C_b \frac{\left\{ \sqrt{\frac{2}{aC_d} + \frac{\kappa}{3aC_d}} C_0 [1 + \exp(2\chi)] \right\}^2}{\left\{ \sqrt{\frac{2}{aC_d} - \frac{\kappa}{3aC_d\chi}} C_0 [1 - \exp(2\chi)] \right\}^2}$$

となる。(11)式より、樹木が存在する場合の流れに対する全抵抗は、 $(C_f' + a'C_d/2)$  であり、この値が  $C_b, a$  によってどのように変化するかを示したものが図-5である。なお本検討においては、 $C_d$ の値として円柱の抗力係数である1.2を用いている。 $a$  および  $C_b$  の増加とともに全抵抗は大きくなるが、 $C_b$  の増加に対してよりも  $a$  の増加に対する増加の方がより顕著となっている。この図を用いることで、河床の抵抗係数と樹木の密度パラメータを与えると概略の平均流速を知ることができる。また、全抵抗を  $C_f'$  と  $a'C_d/2$  とに分離して示したものが図-6、7である。 $a'C_d/2$  は、 $C_b$  によってほとんど変化せずほぼ  $a$  のみによって規定されている。一方、 $C_f'$  は、 $C_b$  の増加とともに大きくなる傾向があり、その割合は  $a$  の値が大きい程大きくなる。さらに、全抵抗に対して、 $C_f'$  と  $a'C_d/2$  のどちらがより大きなウェイトを占めて

いるかを把握するため、 $C'_f / (C'_f + a'C_d/2)$ の値を図-8に示した。 $C_b$ が大きく  $a$  が小さい範囲では  $C'_f$  が、 $a$  が大きく  $C'_f$  が小さい範囲では  $a'C_d/2$  が卓越していることが確認できる。

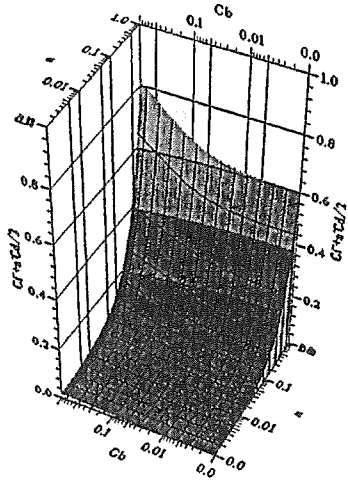


図-5  $C'_f + a'C_d/2$  の変化

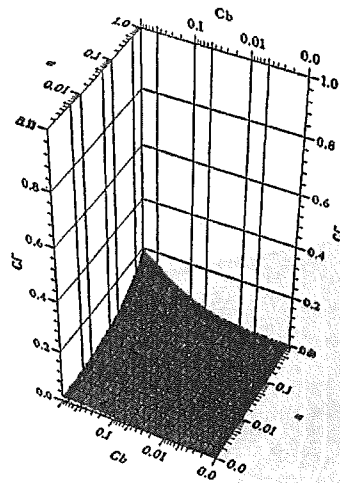


図-6  $C'_f$  の変化

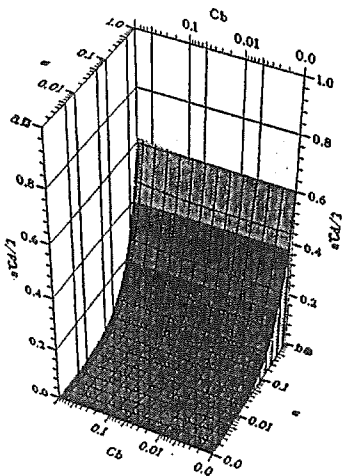


図-7  $a'C_d/2$  の変化

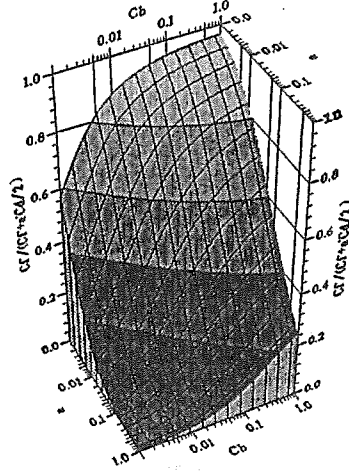


図-8  $C'_f / (C'_f + a'C_d/2)$  の変化

次に、 $a'$  は、 $C_b, a$  によってほとんど変化しないことが判明したが、 $C'_f$  が樹木群の存在しない場合に比較してどの程度変化するかを把握することとする。樹木がない場合の水深方向流速分布は、(4) 式の左辺第3項を省略したものを用いると、

$$u_0 = -\frac{3}{\kappa}z^2 + \frac{6}{\kappa}z + \frac{1}{\sqrt{C_b}}$$

で表され、これより水深方向平均流速  $\langle u_0 \rangle$  および底面流速  $u_{0b}$  は

$$\langle u_0 \rangle = \frac{2}{\kappa} + \frac{1}{\sqrt{C_b}}, \quad u_{0b} = \frac{1}{\sqrt{C_b}}$$

となり、樹木群が存在しない場合の摩擦係数  $C_{f0}$  は、

$$C_{f0} = \frac{1}{\left(\frac{2}{\kappa} + \frac{1}{\sqrt{C_b}}\right)^2}$$

となる。よって、樹木の存在による流速分布の変化に伴う摩擦係数の変化は、

$$\frac{C'_f}{C_{f0}} = C_b \left( \frac{2}{\kappa} + \frac{1}{\sqrt{C_b}} \right)^2 \quad (12)$$

となる。

河川計画では、通常河床の抵抗等をマンギの粗度係数 $\tilde{n}_m$ で表現していることから、(12)式の関係をマンギの粗度係数で表現することとする。いま、摩擦係数をマンギの粗度係数で表現すると $C_f = g\tilde{n}_m^2/\bar{h}^3$ であることより、樹木群の存在する場合の粗度係数の変化量は、

$$\frac{\tilde{n}_m}{\tilde{n}_{m0}} = \left( \frac{2}{\kappa} \sqrt{C_b} + 1 \right) \frac{\left\{ \sqrt{\frac{2}{aC_d}} + \frac{\kappa}{3aC_d} C_0 [1 + \exp(2\chi)] \right\}}{\left\{ \sqrt{\frac{2}{aC_d}} - \frac{\kappa}{3aC_d} C_0 [1 - \exp(2\chi)] \right\}}$$

となる。図-9は、横軸に $a$ 、縦軸に $\tilde{n}_m/\tilde{n}_{m0}$ をとったものである。樹木密度の増加とともに変化量も増加する傾向を示し、その増加の割合は、摩擦係数が大きいほど大きくなる。このように、水深方向に平均した流速を計算する場合、樹木群の影響を取り込むためには、樹木の抗力以外に流速分布の変化に伴う粗度係数の変化を考慮する必要がある。

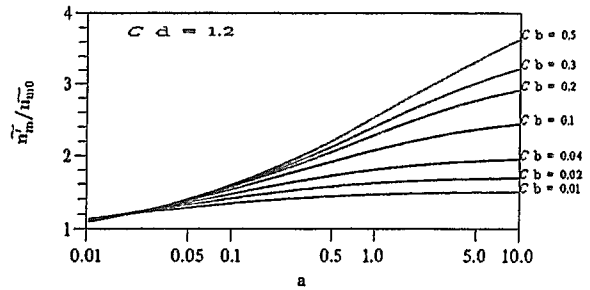


図-9  $\tilde{n}_m/\tilde{n}_{m0}$ の変化

### 3. 2次元浅水流モデルへの適用

前節までにより樹木周辺の流れがある程度明らかになったことから、この結果を用いて一部に樹木が存在する河道への適用を試みる。

#### 3.1 基礎式

基礎方程式は、2次元浅水流モデルの基礎式<sup>4)</sup>に樹木の抗力を取り込んだ次式とする。

$$\begin{aligned} \langle \bar{u} \rangle \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial \bar{s}} + \langle \bar{v} \rangle \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial \bar{n}} + \frac{\langle \bar{u} \rangle \langle \bar{v} \rangle}{\bar{r}} &= -g \frac{\partial (\bar{h} + \bar{z})}{\partial \bar{n}} - \frac{\bar{\tau}_s}{\bar{\rho} \bar{h}} + \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \bar{\varepsilon} \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial \bar{s}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \bar{\varepsilon} \frac{\partial \langle \bar{u} \rangle}{\partial \bar{s}} \right) - \frac{\bar{a}'}{2} C_d \langle \bar{u} \rangle \sqrt{\langle \bar{u} \rangle^2 + \langle \bar{v} \rangle^2} \\ \langle \bar{u} \rangle \frac{\partial \langle \bar{v} \rangle}{\partial \bar{s}} + \langle \bar{v} \rangle \frac{\partial \langle \bar{v} \rangle}{\partial \bar{n}} - \frac{\langle \bar{u} \rangle^2}{\bar{r}} &= -g \frac{\partial (\bar{h} + \bar{z})}{\partial \bar{n}} - \frac{\bar{\tau}_n}{\bar{\rho} \bar{h}} + \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left( \bar{\varepsilon} \frac{\partial \langle \bar{v} \rangle}{\partial \bar{s}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left( \bar{\varepsilon} \frac{\partial \langle \bar{v} \rangle}{\partial \bar{n}} \right) - \frac{\bar{a}'}{2} C_d \langle \bar{v} \rangle \sqrt{\langle \bar{u} \rangle^2 + \langle \bar{v} \rangle^2} \\ \frac{\partial (\langle \bar{u} \rangle \bar{h})}{\partial \bar{s}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial (\bar{\tau} \langle \bar{u} \rangle \bar{h})}{\partial \bar{n}} &= 0 \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{s}, \bar{n}$ ; 河道縦断方向および横断方向の軸、 $\langle \bar{u} \rangle, \langle \bar{v} \rangle$ ;  $\bar{s}, \bar{n}$ 軸方向の水深平均流速、 $\bar{r}$ ; 河道曲率半径、 $\bar{\tau}_s, \bar{\tau}_n$ ;  $\bar{s}, \bar{n}$ 軸方向の河床剪断力である。なお、 $\bar{\tau}_s, \bar{\tau}_n$ は、水深方向の流速分布が異なることによる粗度係数の変化を考慮し、

$$\frac{\bar{\tau}_s}{\bar{\rho} \bar{h}} = \frac{\tilde{g} \tilde{n}_m'^2}{\bar{h}^{4/3}} \langle \bar{u} \rangle \sqrt{\langle \bar{u} \rangle^2 + \langle \bar{v} \rangle^2}, \quad \frac{\bar{\tau}_n}{\bar{\rho} \bar{h}} = \frac{\tilde{g} \tilde{n}_m'^2}{\bar{h}^{4/3}} \langle \bar{v} \rangle \sqrt{\langle \bar{u} \rangle^2 + \langle \bar{v} \rangle^2}$$

で与える。

#### 3.2 適用結果

図-10に示す平面形状を有する複々断面の実験水路での実験値と計算値とを比較する。なお、計算格子上に丸印を打った範囲に樹木群として、縦断方向および横断方向間隔5cmで直径5mmの円柱を配置している。

従来、樹木群が存在する河道の流況計算を行う場合、樹木の影響として河床粗度を試行錯誤的に大きくして行っていた。しかし、本研究では、樹木の密度パラメータおよび樹木の抵抗係数を2次元浅水流モデルに組み込んでいことから、粗度係数は樹木が存在しない場合と同様の粗度を用いている (case A)。比較のため樹木が存在しない場合 (case B) および従来行われていた樹木の影響を粗度で換算する方法 (case C) についても計算を行った。各場合の水理諸元を表-2に示す。

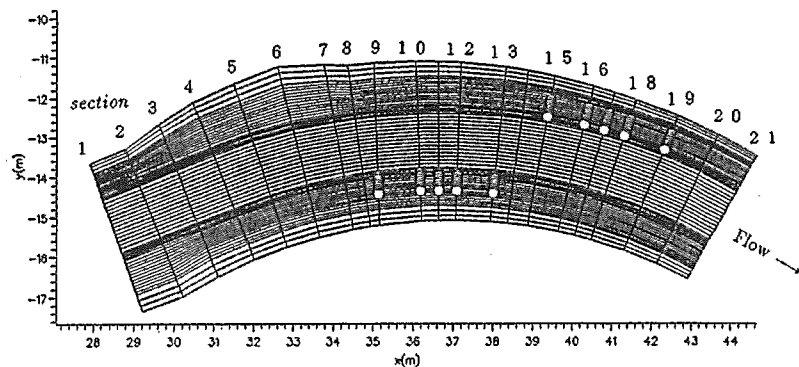


図-10 実験水路計算格子

表-2 計算に用いた水理諸元

	流量 l/s	下流端水深 cm	粗度係数		
			高水敷	低水路	樹木群内
case A	60.6	8.6	0.024	0.014	-
case B	60.6	8.6	0.024	0.014	-
case C	60.6	8.6	0.024	0.014	0.120

図-11は、観測された流速と計算結果を比較したものである。section12のように樹木群中央部における流れは、中水敷に存在する樹木群の影響により樹木が無い場合に比べ、中水敷で流れが遅くなりその影響で高水敷の流れが早くなっている。今回の計算法でもこの傾向を十分表現することができる。一方、section14のような樹木群外でも樹木群の影響を受けている流れの不等流性の強い箇所では、実験値との適合性が悪く実験値に比べ、樹木の存在する中水敷の流速が樹木群の上流で小さく下流で大きくなっている。この理由としては、樹木群の影響範囲が不明であるため、樹木が存在する箇所のみ基礎式の右辺第5項を考慮し、その他の箇所ではこの項を省略しているためと考えられる。また、樹木による水深方向流速分布の変化に伴う粗度係数の変化の割合を等流状態で考えていることにも起因している。今後、樹木の影響範囲を把握し、その結果をこのモデルに取り込む必要がある。しかし、今回提案する計算方法は、これまでのように樹木の影響を試行錯誤的に決定しなくてもよく、またより正確に樹木群を含む河道の流れを把握することができる。

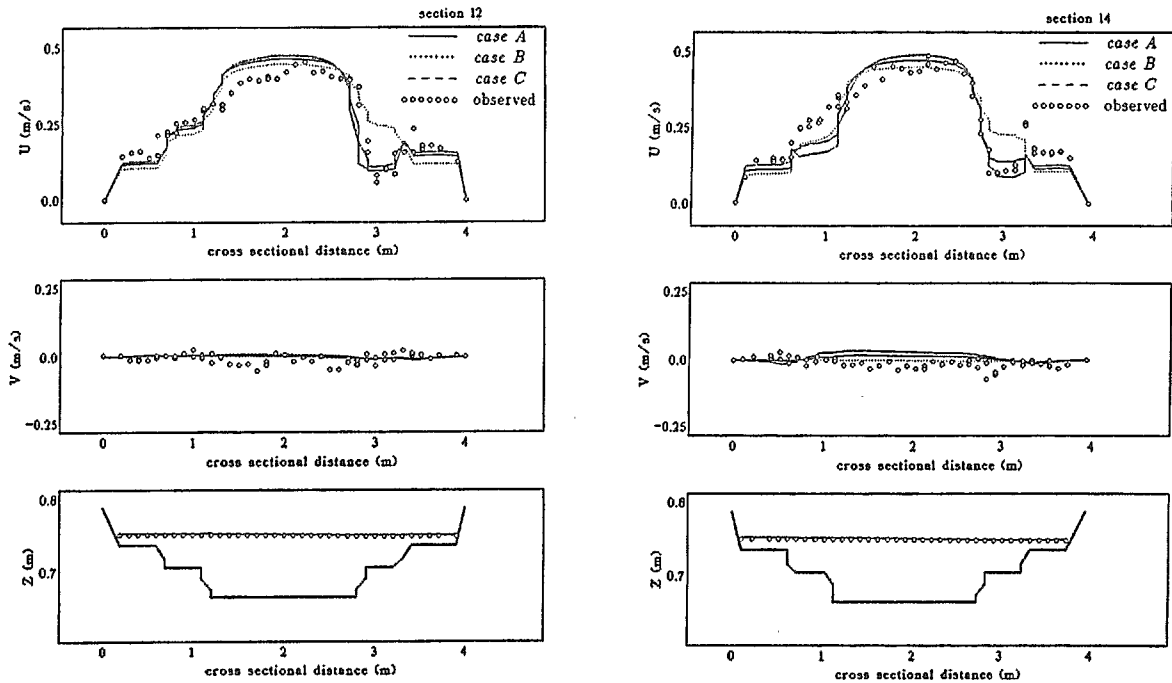


図-11 縦横断方向流速の実験値と計算値の比較

おわりに

環境に配慮した河道計画が望まれるようになり、河道に樹木が存在する場合の流況計算法が種々提案されている。しかしこれらは、樹木の存在による水深方向の流速分布の変化を見込んでおらず、必ずしも正確に樹木が存在する流れを再現しているとはいきれなかった。特に、河道において樹木が問題となる箇所は高水敷であり、一般に水深方向の流速分布の変化に伴う粗度係数の変化が大きなもの予想される。この場合水深方向の流速分布の変化を見込まなければ、河道の流下能力上危険側の算出を行うこととなる。

本研究では、樹木群内の等流状態における水深方向の流速分布を解析的に求め、水深方向に平均した流速を算出する場合の粗度係数の変化量を算出した。これを用いることにより、より正確に流速が算出できる。さらに、2次元浅水流モデルに粗度係数の変化および樹木の抗力を組み込むことにより、樹木が存在する河道の平面流況等も計算可能となった。また、本手法を用いることにより、樹木の配置パターンや樹木密度による流れの違いを簡単に算出することができ、高水敷における樹木の植栽計画や伐採計画を立案するための有力な手法となる。

しかしながら、樹木群内と樹木群外の影響が相互に干渉する場所における水深方向の流速分布は不明であり、今後検討を進める必要がある。

#### 参考文献

1. 寺沢寛一；自然科学者のための数学概論応用編、岩波書店、1969年7月
2. 泉典洋、池田駿介、伊藤力生；流水抵抗及び浮遊砂濃度に及ぼす植生の効果、第33回水理講演会論文集、1989年2月
3. 山崎真一、石川忠晴、金丸督司；開水路平面せん断流に関する実験的研究、第39回年次学術講演会講演概要集、1984年10月
4. 清水康行、板倉忠興；河川における2次元流れと河床変動の計算、土木試験所報告第85号、1986年10月