

一般曲線座標系を用いた常射流混在流れの計算法の開発

開発土木研究所 河川研究室 正員 崇田徳彦
 河川研究室 正員 清水康行
 北海道開発コンサルタント(株) 正員 山下恭正

1. はじめに

我が国の河川は諸外国、とりわけ大陸の諸河川に比べ地形的要因からほとんどが急流河川であるといっても過言ではない。これらの急流河川においては治水対策上、床止め工や水制工の占める役割は、非常に大きい。これらの治水施設の施工にあたっては模型実験や河川技術者の経験により、その効果や問題点の検討が行われている。しかしながら、近年の治水事業に対するニーズの多様化や環境への配慮から河川構造物や河道自体が複雑な形状をとる場合もあり、特に急流河川や床止め工を含む流れにおいては、跳水現象等が生じ流れが非常に複雑になるため、いままでの実験や経験のみではその水理機構が明らかにならない場合も多い。これに対して、計算により任意の河道形状における流れの予測が可能となればより短時間で合理的な河道の設計が可能となる。従来、著者らは2次元浅水流方程式を数値的に計算する方法で河川の流れの予測を行って来たが、計算に用いた方程式が直交座標系で表されているため計算格子はすべて直交している必要があり任意の河道形状への適用は困難であった。また、差分式上の問題から、跳水現象等を含む流れの計算においては十分な精度が期待出来ないという欠点もあった。跳水現象等を含み局所的に流れが急変する場合における数値計算法としては MacCormack 法が有効であり著者らにより1次元の流れの計算¹⁾に応用されている。この場合、床止めだけを取り出した局所的な計算には有効であるが河道全体の流れを予測するモデルとはなっていない。これに対し、畑ら²⁾は MacCormack 法を2次元流れの計算に適用し河川合流部や水制を含む急変流の計算法の開発を行っている。しかしながら、畑ら²⁾によるモデルは直交直線座標系を用いているため、実河川のように河幅が漸変する場合や流路の曲率が急変するような場合には適用出来ない。そこで本研究においては、これらの問題点を一気に解決すべく、2次元の一般曲線座標系における流れの方程式を基礎式としこれを MacCormack 法で計算するモデルの開発を行う。ここで従来の MacCormack 法では直交直線座標における数値計算のみを対象としていたが、本研究においてはこれを一般曲線座標においても計算可能なように拡張をおこなうものとする。一般曲線座標系とは任意の河道形状に適用可能な座標系であり、計算格子も直交している必要もなく境界条件も非常に簡単に与えることが可能となる。モデルの検証は水路幅が漸変する湾曲河道に段落ち部および段上がり部が存在する条件での水理模型実験³⁾を用いて行うものとする。

2. 一般曲線座標系への座標変換

(x, y) を直交直線座標 (図-1)、 (ψ, ϕ) を一般曲線座標 (図-2) とし、2つの座標系どおしの座標変換を次式で定義する。

$$\psi = \psi(x, y), \quad \phi = \phi(x, y) \tag{1}$$

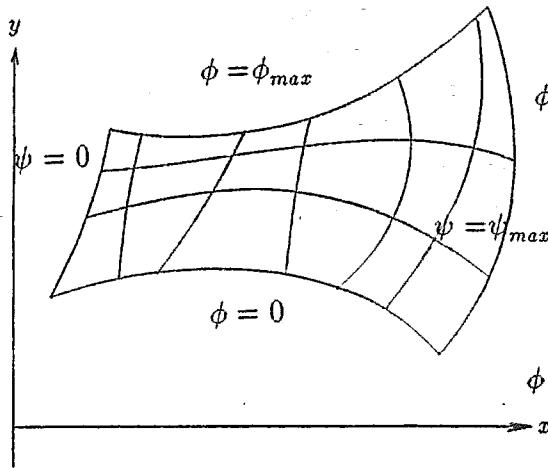


図-1 直交直線座標 (x, y)

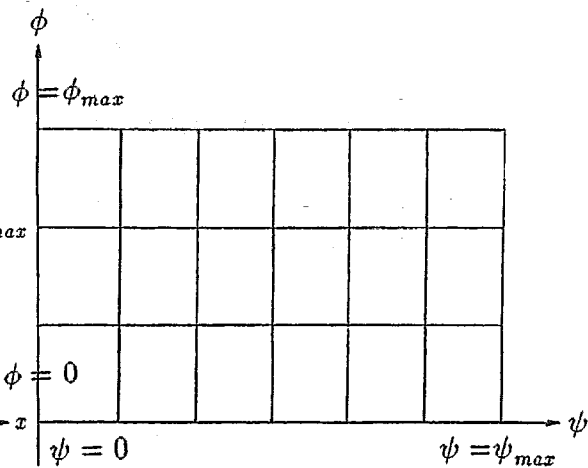


図-2 一般曲線座標 (ψ, ϕ)

Numerical Model of Open Channel Flow with Hydraulic Jump using General Non-orthogonal Coordinate System
 by Naruhiko MUNETA, Yasuyuki SHIMIZU, Yasumasa YAMASHITA

x, y に関する変微分は ψ, ϕ を用いて次式の関係で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} = \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} + \phi_x \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \psi} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} = \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} + \phi_y \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (2)$$

ここで、 $\psi_x = \partial \psi / \partial x$ 、 $\phi_x = \partial \phi / \partial x$ 、 $\psi_y = \partial \psi / \partial y$ 、 $\phi_y = \partial \phi / \partial y$ である。直交直線座標系における全微分 (dx, dy) から一般曲線座標における全微分 $(d\psi, d\phi)$ への変換式は以下のように表される。

$$\begin{pmatrix} d\psi \\ d\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_x & \psi_y \\ \phi_x & \phi_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_y & -\psi_y \\ -\phi_x & \psi_x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} d\psi \\ d\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \phi_y & -\psi_y \\ -\phi_x & \psi_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\psi \\ d\phi \end{pmatrix} \quad (4)$$

ただし、 J は座標変換のヤコビアンで $J = \psi_x \phi_y - \psi_y \phi_x$ である。一方、 $(d\psi, d\phi)$ から (dx, dy) への変換式は

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\psi & x_\phi \\ y_\psi & y_\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\psi \\ d\phi \end{pmatrix} \quad (5)$$

と表される。ただし、 $x_\psi = \partial x / \partial \psi$ 、 $x_\phi = \partial x / \partial \phi$ 、 $y_\psi = \partial y / \partial \psi$ 、 $y_\phi = \partial y / \partial \phi$ である。(4) 式と (5) 式の関係より

$$\begin{pmatrix} x_\psi & x_\phi \\ y_\psi & y_\phi \end{pmatrix} = \frac{1}{J} \begin{pmatrix} \phi_y & -\psi_y \\ -\phi_x & \psi_x \end{pmatrix} \quad (6)$$

の関係が得られる。したがって、 x_ψ 、 x_ϕ および y_ψ 、 y_ϕ は ψ_x 、 ψ_y 、 ϕ_x 、 ϕ_y 、および J を用いて

$$x_\psi = \frac{\phi_y}{J}, \quad x_\phi = -\frac{\psi_y}{J}, \quad y_\psi = -\frac{\phi_x}{J}, \quad y_\phi = \frac{\psi_x}{J} \quad (7)$$

と表される。一般曲線座標 (ψ, ϕ) における流速の反変成分 u^ψ 、 u^ϕ は直線直交座標 (x, y) における流速成分を u^x 、 u^y として次式で表される。

$$u^\psi = \psi_x u^x + \psi_y u^y, \quad u^\phi = \phi_x u^x + \phi_y u^y \quad (8)$$

反対に、 u^x 、 u^y は u^ψ 、 u^ϕ を用いて次式で表される。

$$u^x = \frac{1}{J}(\phi_y u^\psi - \psi_y u^\phi), \quad u^y = \frac{1}{J}(-\phi_x u^\psi + \psi_x u^\phi) \quad (9)$$

3. 一般曲線座標系における St. Venant 方程式

上記の関係を用いることにより直線直交座標における 2 次元 St. Venant 方程式⁴⁾ は以下の様に一般曲線座標系に変換される。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial \psi} + \frac{\partial C}{\partial \phi} = D_\psi + D_\phi \quad (10)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad D_\psi = \begin{pmatrix} d_1^\psi \\ d_2^\psi \\ d_3^\psi \end{pmatrix}, \quad D_\phi = \begin{pmatrix} d_1^\phi \\ d_2^\phi \\ d_3^\phi \end{pmatrix} \quad (11)$$

ただし、(11) 式のベクトルの各要素は以下のように表される。

$$a_1 = \frac{h}{J}, \quad a_2 = \frac{hu^x}{J}, \quad a_3 = \frac{hu^y}{J} \quad (12)$$

$$b_1 = \frac{hu^\psi}{J} \quad (13)$$

$$b_2 = \frac{1}{J} \left[h(u^x u^\psi + \frac{\psi_x}{2} gh) - \epsilon \left\{ \psi_x \left(\psi_x \frac{\partial(u^x h)}{\partial \psi} + \phi_x \frac{\partial(u^x h)}{\partial \phi} \right) + \psi_y \left(\psi_y \frac{\partial(u^x h)}{\partial \psi} + \phi_y \frac{\partial(u^x h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \quad (14)$$

$$b_3 = \frac{1}{J} \left[h(u^y u^\psi + \frac{\psi_y}{2} gh) - \varepsilon \left\{ \psi_x \left(\psi_x \frac{\partial(u^y h)}{\partial \psi} + \phi_x \frac{\partial(u^y h)}{\partial \phi} \right) + \psi_y \left(\psi_y \frac{\partial(u^y h)}{\partial \psi} + \phi_y \frac{\partial(u^y h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \quad (15)$$

$$c_1 = \frac{h u^\phi}{J} \quad (16)$$

$$c_2 = \frac{1}{J} \left[h(u^x u^\phi + \frac{\phi_x}{2} gh) - \varepsilon \left\{ \phi_x \left(\psi_x \frac{\partial(u^x h)}{\partial \psi} + \phi_x \frac{\partial(u^x h)}{\partial \phi} \right) + \phi_y \left(\psi_y \frac{\partial(u^x h)}{\partial \psi} + \phi_y \frac{\partial(u^x h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \quad (17)$$

$$c_3 = \frac{1}{J} \left[h(u^y u^\phi + \frac{\phi_y}{2} gh) - \varepsilon \left\{ \phi_x \left(\psi_x \frac{\partial(u^y h)}{\partial \psi} + \phi_x \frac{\partial(u^y h)}{\partial \phi} \right) + \phi_y \left(\psi_y \frac{\partial(u^y h)}{\partial \psi} + \phi_y \frac{\partial(u^y h)}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \quad (18)$$

$$d_1^\psi = 0, \quad d_2^\psi = \frac{1}{J} \left[-gh\psi_x \frac{\partial \eta}{\partial \psi} - \frac{C_f}{J} \phi_y u^\psi \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2} \right], \quad d_3^\psi = \frac{1}{J} \left[-gh\psi_y \frac{\partial \eta}{\partial \psi} + \frac{C_f}{J} \phi_x u^\psi \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2} \right] \quad (19)$$

$$d_1^\phi = 0, \quad d_2^\phi = \frac{1}{J} \left[-gh\phi_x \frac{\partial \eta}{\partial \phi} + \frac{C_f}{J} \psi_y u^\phi \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2} \right], \quad d_3^\phi = \frac{1}{J} \left[-gh\phi_y \frac{\partial \eta}{\partial \phi} - \frac{C_f}{J} \psi_x u^\phi \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2} \right] \quad (20)$$

ただし、 η は河床高、 h は水深、 g は重力加速度、 ε は渦動粘性係数、 C_f は河床の摩擦係数でありマニングの粗度係数 n_m を用いて $C_f = gn_m^2/h^{1/3}$ で表される。

4. MacCorMack 差分スキーム

2次元の MacCormack 差分法による計算法の概略を以下に示す。 n を時間ステップ、 i および j を空間上の格子点番号とし、ある変量 U の時刻 n における (i, j) 格子点の量を $U_{i,j}^n$ とする。計算上の時間刻み幅を Δt とし、 $U_{i,j}^n$ の Δt 秒後の値 $U_{i,j}^{n+1}$ を次式で求める。

$$U_{i,j}^{n+1} = [L_\psi(\Delta T_\psi)]^m [L_\phi(\Delta t_\phi)]^\ell [L_\psi(\Delta t_\psi)]^\ell [L_\phi(\Delta T_\phi)]^m U_{i,j}^n \quad (21)$$

ただし、 L_ψ 、 L_ϕ は各々 ψ 、 ϕ 方向の差分演算子であり、 $\Delta\psi$ 、 $\Delta\phi$ は空間上の差分間隔である。 Δt_ψ および Δt_ϕ はそれぞれ $\Delta\psi$ および $\Delta\phi$ に対応する Δt でありそれぞれ ψ および ϕ 方向の C.F.L 条件を満たす様に決められ、 m および ℓ は次式を満たす整数の組み合わせである。

$$\Delta t = m\Delta t_\psi = \ell\Delta t_\phi \quad (22)$$

(21) 式における L_ψ および L_ϕ はそれぞれ通常の MacCormack 法と同様に予測子 (Predictor) および修正子 (Corrector) の2段階に分けて計算を行うものとし、それぞれの予測子および修正子段階における差分の方向は表-1に掲げるとおりに行う。

表-1 各ステップにおける差分方式

第1ステップの L_ψ	予測子: 後進差分	第2ステップの L_ϕ	予測子: 後進差分
	修正子: 前進差分		修正子: 前進差分
第3ステップの L_ϕ	予測子: 前進差分	第4ステップの L_ψ	予測子: 前進差分
	修正子: 後進差分		修正子: 後進差分

表-1 に従い (10) 式を以下の様に差分化する。

< 第1ステップ >

ψ 方向予測子 (predictor) ~ 後進差分

$$A^p(i, j) = A^o(i, j) - \frac{\Delta t_\psi}{\Delta \psi} [B^o(i, j) - B^o(i-1, j)] + \Delta t_\psi (D_\psi^B)^o(i, j) \quad (23)$$

ψ 方向修正子 (corrector) ~ 前進差分

$$A^c(i, j) = \frac{1}{2} \left\{ A^o(i, j) + A^p(i, j) - \frac{\Delta t_\psi}{\Delta \psi} [B^p(i+1, j) - B^p(i, j)] + \Delta t_\psi (D_\psi^U)^p(i, j) \right\} \quad (24)$$

< 第2ステップ >

ϕ 方向予測子 (predictor) ~ 後進差分

$$A^p(i, j) = A^o(i, j) - \frac{\Delta t_\phi}{\Delta \phi} [C^o(i, j) - C^o(i, j - 1)] + \Delta t_\phi (D_\phi^B)^o(i, j) \quad (25)$$

ϕ 方向修正子 (corrector) ~ 前進差分

$$A^c(i, j) = \frac{1}{2} \left\{ A^o(i, j) + A^p(i, j) - \frac{\Delta t_\phi}{\Delta \phi} [C^p(i, j + 1) - C^p(i, j)] + \Delta t_\phi (D_\phi^U)^p(i, j) \right\} \quad (26)$$

< 第3ステップ >

ψ 方向予測子 (predictor) ~ 前進差分

$$A^p(i, j) = A^o(i, j) - \frac{\Delta t_\psi}{\Delta \psi} [B^o(i + 1, j) - B^o(i, j)] + \Delta t_\psi (D_\psi^U)^o(i, j) \quad (27)$$

ψ 方向修正子 (corrector) ~ 後進差分

$$A^c(i, j) = \frac{1}{2} \left\{ A^o(i, j) + A^p(i, j) - \frac{\Delta t_\psi}{\Delta \psi} [B^p(i, j) - B^p(i - 1, j)] + \Delta t_\psi (D_\psi^B)^p(i, j) \right\} \quad (28)$$

< 第4ステップ >

ϕ 方向予測子 (predictor) ~ 前進差分

$$A^p(i, j) = A^o(i, j) - \frac{\Delta t_\phi}{\Delta \phi} [C^o(i, j + 1) - C^o(i, j)] + \Delta t_\phi (D_\phi^U)^o(i, j) \quad (29)$$

ϕ 方向修正子 (corrector) ~ 後進差分

$$A^c(i, j) = \frac{1}{2} \left\{ A^o(i, j) + A^p(i, j) - \frac{\Delta t_\phi}{\Delta \phi} [C^p(i, j) - C^p(i, j - 1)] + \Delta t_\phi (D_\phi^B)^p(i, j) \right\} \quad (30)$$

上式中において上付添え字 o 、 p および c はそれぞれ前段階の計算値、予測子および修正子段階の値であることを示す。また、 D_ψ および D_ϕ の上付き添え字 B および U はそれぞれ後進差分および前進差分に対応する D_ψ および D_ϕ の値であり以下のように表わされる。

$$D_\psi^B = \begin{pmatrix} (d_1^\psi)^B \\ (d_2^\psi)^B \\ (d_3^\psi)^B \end{pmatrix}, \quad D_\phi^B = \begin{pmatrix} (d_1^\phi)^B \\ (d_2^\phi)^B \\ (d_3^\phi)^B \end{pmatrix}, \quad D_\psi^U = \begin{pmatrix} (d_1^\psi)^U \\ (d_2^\psi)^U \\ (d_3^\psi)^U \end{pmatrix}, \quad D_\phi^U = \begin{pmatrix} (d_1^\phi)^U \\ (d_2^\phi)^U \\ (d_3^\phi)^U \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$(d_2^\psi)^B = \frac{1}{J} \left\{ -\frac{g\psi_x h(i, j) + h(i - 1, j)}{\Delta \psi} [\eta(i, j) - \eta(i - 1, j)] - \frac{C_f}{J} \phi_y u^\psi V \right\} \quad (32)$$

$$(d_3^\psi)^B = \frac{1}{J} \left\{ -\frac{g\psi_y h(i, j) + h(i - 1, j)}{\Delta \psi} [\eta(i, j) - \eta(i - 1, j)] + \frac{C_f}{J} \phi_x u^\psi V \right\} \quad (33)$$

$$(d_2^\phi)^B = \frac{1}{J} \left\{ -\frac{g\phi_x h(i, j) + h(i, j - 1)}{\Delta \phi} [\eta(i, j) - \eta(i, j - 1)] - \frac{C_f}{J} \psi_y u^\phi V \right\} \quad (34)$$

$$(d_3^\phi)^B = \frac{1}{J} \left\{ -\frac{g\phi_y h(i, j) + h(i, j - 1)}{\Delta \phi} [\eta(i, j) - \eta(i, j - 1)] + \frac{C_f}{J} \psi_x u^\phi V \right\} \quad (35)$$

$$(d_2^\psi)^U = \frac{1}{J} \left\{ -\frac{g\psi_x h(i + 1, j) + h(i, j)}{\Delta \psi} [\eta(i + 1, j) - \eta(i, j)] + \frac{C_f}{J} \phi_y u^\psi V \right\} \quad (36)$$

$$(d_3^\psi)^U = \frac{1}{J} \left\{ -\frac{g\psi_y h(i + 1, j) + h(i, j)}{\Delta \psi} [\eta(i + 1, j) - \eta(i, j)] - \frac{C_f}{J} \phi_x u^\psi V \right\} \quad (37)$$

$$(d_2^\phi)^U = \frac{1}{J} \left\{ -\frac{g\phi_x h(i, j + 1) + h(i, j)}{\Delta \phi} [\eta(i, j + 1) - \eta(i, j)] + \frac{C_f}{J} \psi_y u^\phi V \right\} \quad (38)$$

$$(d_3^\phi)^U = \frac{1}{J} \left\{ -\frac{g\phi_y h(i, j + 1) + h(i, j)}{\Delta \phi} [\eta(i, j + 1) - \eta(i, j)] - \frac{C_f}{J} \psi_x u^\phi V \right\} \quad (39)$$

ただし、 $V = \sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}$ である。

計算は上記の1~4ステップを与えられる初期条件から目的の時間が経過するまで繰り返し行う。定常状態における計算結果は計算上の変数が定常状態に達するまで繰り返し計算を行う。

5. 境界条件

水路の上流端では、上流端の流量が所与の流量になる様に各時間ステップにおいて計算上の最上流端の流速を調節する。計算対象の流れが常流の場合は下流端において、射流の場合には上流端において一定の水位条件を与えるものとするが、後に示す計算例においては、計算区間の途中で跳水が生じ支配断面が現れるため、ここでの水位が限界水位となり結果的にここで水位の条件を与えているような状態となるため、上流端や下流端で水位を一定とするとかえって計算が不安定となった。そこで、ここでは上下流端では水位の条件を与えないで、流速成分の流下方向に対する微分量をゼロとする条件を与えることとした。水路側壁においては水路側壁に交わる方向の流速の反変成分をゼロとする。

6. 適用例

6.1 床止め工を含む水路実験

上記の計算法を知ら³⁾が行った水路実験に適用する。実験は実河川の1/50縮尺のフルード相似則模型において行われ、河幅の漸変する蛇行水路の途中に段落ちおよび段上がりを含む条件で行われており、これらの条件はいずれも従来の計算法では予測不可能な水理条件となっている。実験条件を表-2に、水路の平面形状を図-3に示す。

表-2 水理実験条件 (現地換算量)

水路延長	1600 m (KP 4900 ~ 6500)
床止め工設置場所	上流端より 310 m (KP 6190)
下流端水位	135.03 m
流量	277 m ³ /s
低水路粗度係数	0.03
高水路粗度係数	0.045

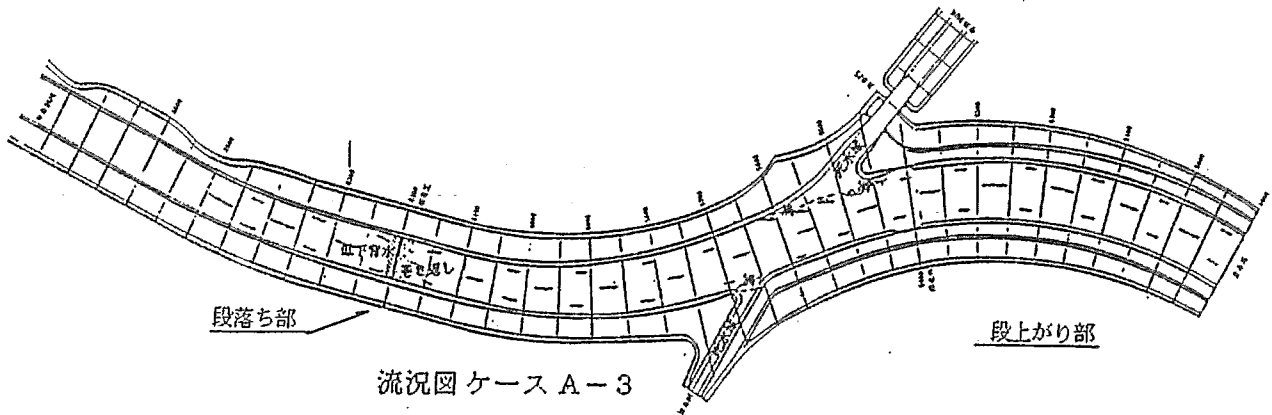


図-3 水路平面図

6.2 計算結果

計算は表-1の条件で、初期条件として全計算区間において等流条件の水位および流速を与え、流れがほぼ定常となった350秒経過後の流速および水位を求めた。その後計算を続行したが、完全には定常状態には達しなかった。しかしながら実際にも跳水現象等を伴う流れが、完全に定常状態になるかどうかは明かではなく今後の検討課題としたい。

図-4に(a)フルード数、(b)各断面の流量および(c)水位の計算結果と実測値および低水路河床高の縦断面図を示す。ここで、図-4(a)のフルード数は計算結果における低水路中央の水深 h および流速 u^x 、 u^y より次式で求めたものである。

$$F_r = \frac{V}{\sqrt{gh}} = \frac{\sqrt{(u^x)^2 + (u^y)^2}}{\sqrt{gh}} \quad (40)$$

また、図-4(c)の水位縦断面図において実線は計算結果を、黒丸は実測値を示しておりいずれも低水路中央の値である。

図-4(c)の河床縦断面図からもわかるように今回の実験はほぼ垂直に約1.7m(現地換算値)近くも落差のある段落ち部および段上がり部が向かい合って設置されているような形状をしており、これらを含む流れは非常に複雑なものとなっている。段落ち部の上流部($X=0\sim 750\text{m}$)ではフルード数が0.6程度の常流流れであるが段落ち部においては急激なフルード数の変化が見られ、これに伴う著しい流速変化が生じていると考えられる。段落ち部の下流では、跳水の影響で流れが安定している。また、段上がり部($X=1500\text{m}$)より下流ではフルード数の上昇が見られるものの、その変化は小さい。

水位の実験値を計算結果と比較してみると、段落ち部上部では計算結果は実験値よりも水位低下が見られるが跳水の生じる位置およびその規模はほぼ正確に予測されている。段落ち部の下流では水位の計算結果に振動傾向が見られるが、ここは実際にも水位が不安定な部分でもあり、全般的に実験結果とほぼ完全に一致している。段落ち部上流での計算結果と実測値の若干の相違は計算断面の数が少ないことに起因していると思われる。

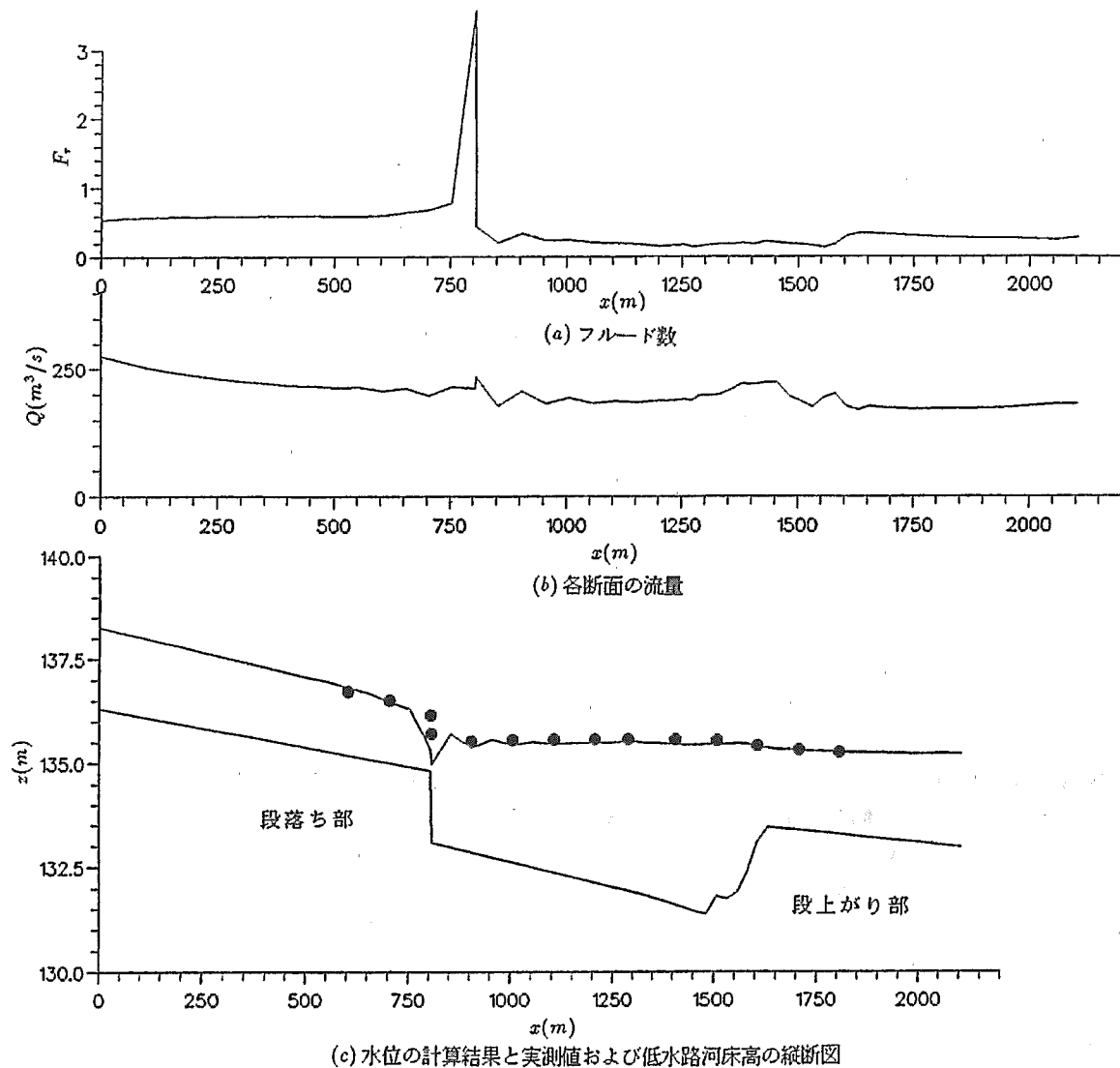


図-4 フルード数、流量、水位縦断面図

7. 考察

本研究では、任意の境界形状や計算格子点の配置に対応可能である一般曲線座標系という極めて画期的な概念を新たに導入し、これを用いて2次元流れの基礎式の誘導を行った。さらに、流れの急変や跳水現象等の複雑な水理現象に有効な計算法である MacCormack 法をこの一般曲線座標系による基礎式への適用を行ったものである。このモデルはまだ開発途上のものであるがこれが完成すると、自然河川は勿論、様々な人工的要因による複雑な河道形状や水理現象がほぼ例外なく予測可能となる極めて有力なモデルである。

今回示した計算例はごく1例ではあるが段落ち部の落差が上流側の水深と同じくらいある等、かなり厳しい条件であったにもかかわらず、精度良い結果が得られ、今後モデルの完成への期待が持たれる。

参考文献

- 1) 崇田徳彦・清水康行・渡邊康玄；MacCormack法を用いた常・射流計算、北海道開発局開発土木研究所月報1990年9月
- 2) 北條紘二・畑敏夫・清水康行；合流部における2次元流況計算法について北海道土木学会支部1990年2月
- 3) 畑敏夫；牛朱別川分水路水理模型実験業務報告書 北海道開発局開発土木研究所平成2年2月
- 4) Garcia, R. and Kahawita, R.: Numerical solution of the St. Venant equations with the MacCormack finite-difference scheme: International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol6, 1986