Q & A

流れの方程式について

河川研究室

［問］ 流れを解くための方程式の各項が持つ意味について教えて下さい。

［回答］ 流れを解くための物理モデルは，

1） 3次元流モデル
2） 2次元浅水流モデル
3） 不定流モデル
4） 不等流モデル
5） 等流モデル

など種々ありますが，どれも物体にかかる力とその物体の運動を表現したものです。

計算を簡易化するため，力および運動の各成分をオーダー比較し，あまり重要でないと思われる成分を省略しますが，省略の仕方により上記のようなモデルの違いがでてきます。

しかし，各モデルとも考え方は同じです。以下，考え方について説明します。

基本的な考え方は，運動の第2則

質量 × 加速度 ＝ 力

すなわち，

$m \cdot a = F$

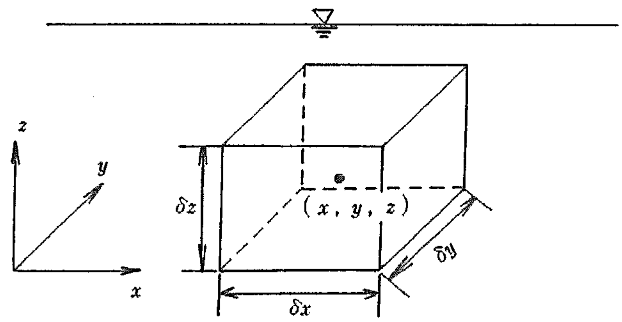
です。

（ex） 重力場で物体がかかる力，すなわち重力は，
（重力） ＝ $m \cdot g$
m；物体の質量
g；重力加速度
で表わされる。

1．完全流体の運動方程式

最初に，最もシンプルな完全流体の運動方程式を考えることとします。水中（川の中）に，微少な正六面体（サイコロ状）の水の塊まりを考えます。

中心の座標 ＝ （x, y, z）



（i） 力

この正六面体において，正六面体に働く力は，

・質量力（例えば，重力）
・各面に働く応力；粘性を無視した完全流体の場合面に垂直に押すように働く圧力 P のみ．

の2種類です。

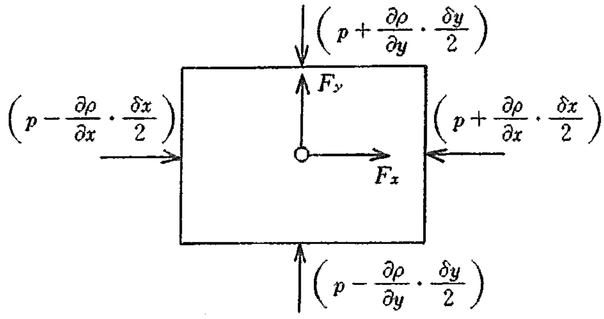
・ 単位質量に働く質量力を F，その成分を F_x, F_y, F_z とすると，正六面体に働く質量力は，

（質量力の x 方向成分） ＝ $\rho F_x \delta x \delta y \delta z$

です。

・ 中心（x, y, z）の圧力を P とすると，x 方向に働く圧力は，

$$\left(P-\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\delta x}{2}\right)\delta y\cdot\delta z-\left(P+\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\delta x}{2}\right)\delta y\cdot\delta z$$
$$=-\frac{\partial p}{\partial x}\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z$$



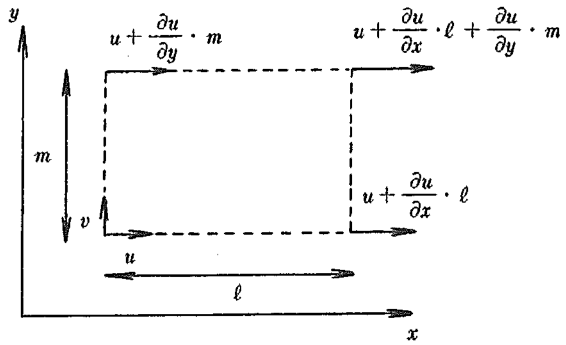
以上より，正六面体に働く x 方向の力は，

$$\rho F_x \delta x \delta y \delta z - \frac{\partial p}{\partial x}\delta x \delta y \delta z$$

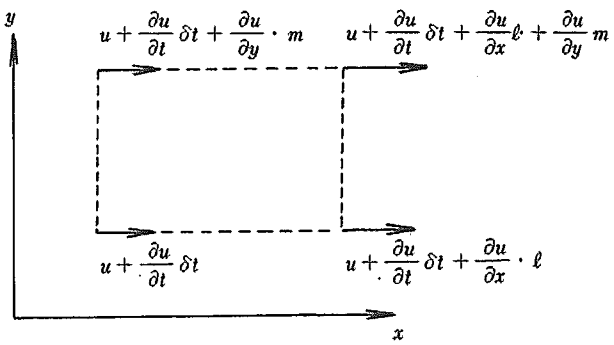
となります。y 方向，z 方向にも同様に考えることができます。

(ii) 加速度

x 軸方向の物体（サイコロ）の加速度 a_x を求めることとします。加速度は，単位時間の速度の変化量です。したがって，ある時刻 t と δt 時刻後，$t+\delta t$ の速度の変化量を求めればよいことになります。



時刻 t の流速場



時刻 $t+\delta t$ の流速場

ある平面内で 流速について，x 軸方向に $\partial u/\partial x$ の勾配，y 軸方向に $\partial u/\partial y$ の勾配を持つとすると，x 軸方向に距離 ℓ，y 軸方向に距離 m 離れた地点の流速は，もとの地点の流速を u と表わすと，$u+\partial u/\partial x\cdot \ell+\partial u/\partial y\cdot m$ で表わされます。

流速 u で距離 ℓ 進む時間を δt，流速 v で距離 m 進む時間も δt となるよう ℓ，m をとると，$\ell=u\delta t$，$m=v\delta t$ となります。したがって，x 軸方向に u，y 軸方向に v の流速をもつ地点にある物体が δt 時刻後には，x 軸方向の流速が $u+\frac{\partial u}{\partial x}u\delta t+\frac{\partial u}{\partial y}v\delta t$ なる地点に移動することになります。しかし，流速は刻々と変化しており，流速が u であった地点の流速は，δt 時刻後には，$u+\frac{\partial u}{\partial t}\delta t$ に変化しています。同様に，$u+\frac{\partial u}{\partial x}u\delta t+\frac{\partial u}{\partial y}v\delta t$ の流速であった地点の流速は，$u+\frac{\partial u}{\partial x}u\delta t+\frac{\partial u}{\partial y}v\delta t+\frac{\partial u}{\partial t}\delta t$ に変化していることになります。

したがって，物体の x 軸方向の流速は，u から $u+\frac{\partial u}{\partial x}u\delta t+\frac{\partial u}{\partial y}v\delta t+\frac{\partial u}{\partial t}\delta t$ へと変化することになります。

流速が z 軸方向にも w という流速をもっている場合は，u から $u+\frac{\partial u}{\partial x}u\delta t+\frac{\partial u}{\partial y}v\delta t+\frac{\partial u}{\partial z}w\delta t+\frac{\partial u}{\partial t}\delta t$ へと変化します。以上より，x 軸方向の加速度は，

$$a_x=\lim_{\delta t\to 0}\frac{\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}u\delta t+\frac{\partial u}{\partial y}v\delta t+\frac{\partial u}{\partial z}w\delta t+\frac{\partial u}{\partial t}\delta t\right)-u}{\delta t}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

同様にして，y 軸方向，z 軸方向の加速度を求めると，次のようになります。

$$\begin{cases} a_x=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z} \\ a_z=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

(iii) 力＝質量×加速度

(i)より，

$$x\text{ 軸方向の力}=\rho\cdot F_x\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z-\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z$$

(ii)より，

$$x\text{ 軸方向加速度}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

一方，正六面体の質量は，$\rho\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z$ です。

したがって，

力 ＝ 加速度 × 質量

$$\rho\cdot F_x\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z-\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\rho\cdot\delta x\cdot\delta y\cdot\delta z$$

$$F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

同様にして，y 軸方向，z 軸方向についても考えると，

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z}=F_x-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \\
\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z}=F_y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} \\
\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z}=F_z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}
\end{cases}
$$

⇩

Euler の運動方程式

2．粘性流体の運動方程式

次に，粘性を持った流れについて考えることとします。実在の粘性流体（*ex*，水，空気）では，面に垂直に働く力（圧力）のほかに，面に平行な力が働きます。

すなわち，流体に粘性があるため，流体塊の間に応力が働きます。x 軸方向の力を考えると，

$$
\begin{aligned}
&\left\{\left(\tau_{xx}+\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)-\left(\tau_{xx}-\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}\frac{\delta x}{2}\right)\right\}\delta y\cdot\delta z \\
&+\left\{\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)-\left(\tau_{yx}-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\frac{\delta y}{2}\right)\right\}\delta z\cdot\delta x \\
&+\left\{\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right)-\left(\tau_{zx}-\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{\delta z}{2}\right)\right\}\delta x\cdot\delta y \\
&=\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z
\end{aligned}
$$

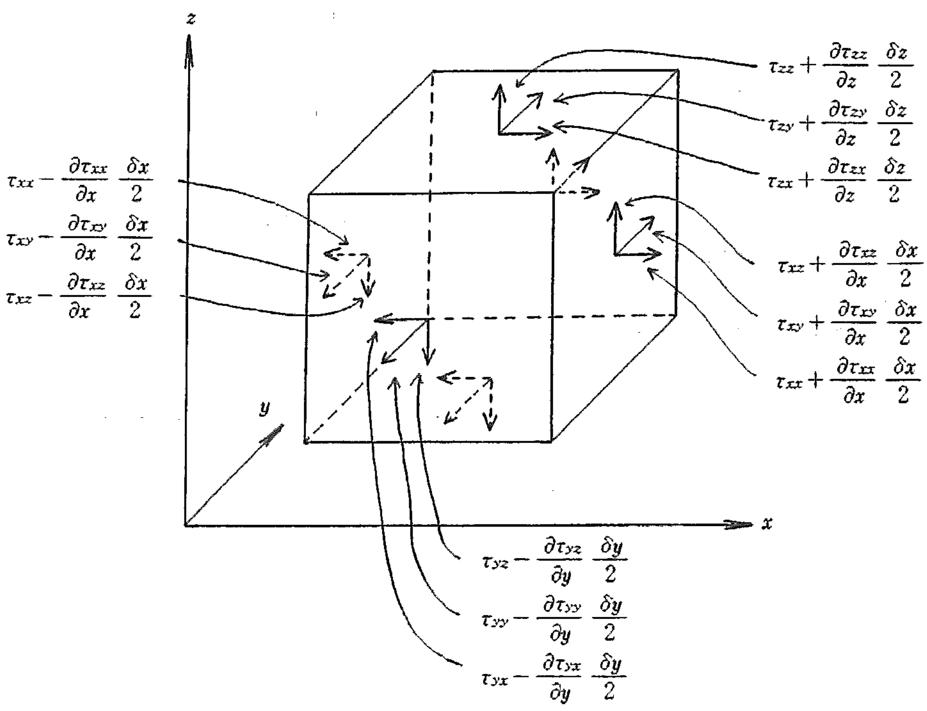
なる力が，完全流体の場合に加えて正六面体にかかることになります。

y 軸，z 軸についても x 軸と同様に与えると，粘性流体の運動方程式は，以下のようになります。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z} \\
\quad =F_x-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}+\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right) \\
\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z} \\
\quad =F_y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}+\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right) \\
\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z} \\
\quad =F_z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}+\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right)
\end{cases}
$$

or

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}+w\dfrac{\partial u}{\partial z} \\
=-\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\Omega+\dfrac{p}{\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right) \\
\dfrac{\partial v}{\partial t}+u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}+w\dfrac{\partial v}{\partial z} \\
=-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\Omega+\dfrac{p}{\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right) \\
\dfrac{\partial w}{\partial t}+u\dfrac{\partial w}{\partial x}+v\dfrac{\partial w}{\partial y}+w\dfrac{\partial w}{\partial z} \\
=-\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\Omega+\dfrac{p}{\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho}\left(\dfrac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zz}}{\partial z}\right)
\end{cases}
$$



～参　考～

$$\tau_{xx}=2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\quad \tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x}=g\frac{\partial z_H}{\partial x}$$

$$\tau_{yy}=2\mu\frac{\partial v}{\partial y},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial y}=g\frac{\partial z_H}{\partial y}$$

$$\tau_{zz}=2\mu\frac{\partial w}{\partial z},\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial z}=g\frac{\partial z_H}{\partial z}$$

より，

- $$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$
$$=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}+gz_H\right)+2\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\nu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\nu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\}$$
- $$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}$$
$$=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho}+gz_H\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\nu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}+2\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left\{\nu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\}$$
- $$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}$$
$$=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}+gz_H\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left\{\nu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\nu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right\}+2\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

ここで，μ；粘性係数，ν；動粘性係数，$\frac{\mu}{\rho}=\nu$

3. 乱れを持った流れ

さらに，乱れを持った流れについて考えることとします。

連続の式 $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ を用い，粘性流体の運動方程式を変形すると，

$$\left\{\begin{aligned}
&\bullet\ \rho\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial(u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}+\frac{\partial(uw)}{\partial z}\right\}\\
&\quad=\rho F_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xx}-p\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{xy}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{xz}\right)\\
&\bullet\ \rho\left\{\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial(uv)}{\partial x}+\frac{\partial(v^2)}{\partial y}+\frac{\partial(vw)}{\partial z}\right\}\\
&\quad=\rho F_y+\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{xy}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{yy}-\rho\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{yz}\right)\\
&\bullet\ \rho\left\{\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial(uw)}{\partial x}+\frac{\partial(vw)}{\partial y}+\frac{\partial(w^2)}{\partial z}\right\}\\
&\quad=\rho F_z+\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xz}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\tau_{yz}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{zz}-p\right)
\end{aligned}\right.$$

となります。

ここで，流れの乱れを考えることとします。

不規則に変動する流れでは，各瞬間の値を，平均値（添字 ⁻）と変動分（添字 ’）とに分割できます。

すなわち，

$$u=\bar{u}+u'$$
$$v=\bar{v}+v'$$
$$w=\bar{w}+w'$$
$$p=\bar{p}+p'$$

となります。また，

$$\overline{uu}=\overline{(\bar{u}+u')(\bar{u}+u')}=\bar{u}\,\bar{u}+2\overline{\bar{u}\,u'}+\overline{u'u'}$$
$$=(\bar{u})^2+\overline{u'u'}$$
$$\overline{uv}=\overline{(\bar{u}+u')(\bar{v}+v')}=\bar{u}\,\bar{v}+\overline{\bar{u}\,v'}+\overline{\bar{v}\,u'}$$
$$+\overline{u'v'}=\bar{u}\,\bar{v}+\overline{u'v'}$$
$$\overline{vw}=\overline{(\bar{v}+v')(\bar{w}+w')}=\bar{v}\,\bar{w}+\overline{\bar{v}w'}+\overline{\bar{w}v'}$$
$$+\overline{v'w'}=\bar{v}\,\bar{w}+\overline{v'w'}$$

です。

一方，粘性流体の運動方程式は，平均流を表現しているため，

$$\left\{\begin{aligned}
&\bullet\ \rho\left\{\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial(\overline{uu})}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{uv})}{\partial y}+\frac{\partial(\overline{uw})}{\partial z}\right\}\\
&\quad=\rho F_x+\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\tau}_{xx}-\bar{p}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\tau}_{xy}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\tau}_{xz}\right)\\
&\bullet\ \rho\left\{\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\frac{\partial(\overline{uv})}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{vv})}{\partial y}+\frac{\partial(\overline{vw})}{\partial z}\right\}\\
&\quad=\rho F_y+\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\tau}_{xy}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\tau}_{yy}-\bar{p}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\tau}_{yz}\right)\\
&\bullet\ \rho\left\{\frac{\partial\bar{w}}{\partial t}+\frac{\partial(\overline{uw})}{\partial x}+\frac{\partial(\overline{vw})}{\partial y}+\frac{\partial(\overline{ww})}{\partial z}\right\}\\
&\quad=\rho F_z+\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{\tau}_{xz}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{\tau}_{yz}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\tau}_{zz}-\bar{p}\right)
\end{aligned}\right.$$

となり，

$$\begin{cases} \cdot\ \rho \left\{ \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \dfrac{\partial (\bar{u}^2)}{\partial x} + \dfrac{\partial (\bar{u}\,\bar{v})}{\partial y} + \dfrac{\partial (\bar{u}\,\bar{w})}{\partial z} \right\} \\ \quad = \rho F_x + \dfrac{\partial}{\partial x} (\bar{\tau}_{xx} - \bar{p} - \rho \overline{u' u'}) + \dfrac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}_{xy} - \rho \overline{u' v'}) \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial z} (\bar{\tau}_{xz} - \rho \overline{u' w'}) \\ \cdot\ \rho \left\{ \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \dfrac{\partial (\bar{u}\,\bar{v})}{\partial x} + \dfrac{\partial (\bar{v}^2)}{\partial y} + \dfrac{\partial (\bar{v}\,\bar{w})}{\partial z} \right\} \\ \quad = \rho F_y + \dfrac{\partial}{\partial x} (\bar{\tau}_{xy} - \rho \overline{u' v'}) + \dfrac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}_{yy} - \bar{p} - \rho \overline{v' v'}) \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial z} (\bar{\tau}_{yz} - \rho \overline{v' w'}) \\ \cdot\ \rho \left\{ \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \dfrac{\partial (\bar{u}\,\bar{w})}{\partial x} + \dfrac{\partial (\bar{v}\,\bar{w})}{\partial y} + \dfrac{\partial (\bar{w}^2)}{\partial z} \right\} \\ \quad = \rho F_z + \dfrac{\partial}{\partial x} (\bar{\tau}_{xz} - \rho \overline{u' w'}) + \dfrac{\partial}{\partial y} (\bar{\tau}_{yz} - \rho \overline{v' w'}) \\ \qquad + \dfrac{\partial}{\partial z} (\bar{\tau}_{zz} - \bar{p} - \rho \overline{w' w'}) \end{cases}$$

ここで，

$$\tau_{xx} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

です。

これに，乱流によるレイノルズ応力を加えた応力は，

$$\bar{\tau}_{xx} - \rho \overline{u' u'} = 2\rho (\nu + \varepsilon) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)$$

$$\bar{\tau}_{yy} - \rho \overline{v' v'} = 2\rho (\nu + \varepsilon) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)$$

$$\bar{\tau}_{zz} - \rho \overline{w' w'} = 2\rho (\nu + \varepsilon) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)$$

$$\bar{\tau}_{xy} - \rho \overline{u' v'} = \rho (\nu + \varepsilon) \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)$$

$$\bar{\tau}_{yz} - \rho \overline{v' w'} = \rho (\nu + \varepsilon) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)$$

$$\bar{\tau}_{zx} - \rho \overline{w' u'} = \rho (\nu + \varepsilon) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)$$

で表わされます。

ここで，ν；動粘性係数，ε；渦動粘性係数($\nu = \mu/\rho$)
以上より，

$$\begin{cases} \cdot \left\{ \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \dfrac{\partial (\bar{u}^2)}{\partial x} + \dfrac{\partial (\bar{u}\,\bar{v})}{\partial y} + \dfrac{\partial (\bar{u}\,\bar{w})}{\partial z} \right\} \\ \quad = F_x + \dfrac{\partial}{\partial x} \left\{ 2(\nu + \varepsilon) \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \dfrac{\bar{p}}{\rho} \right\} + \dfrac{\partial}{\partial y} \left\{ (\nu \right. \\ \qquad \left. + \varepsilon) \left(\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right\} + \dfrac{\partial}{\partial z} \left\{ (\nu + \varepsilon) \left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \right. \right. \\ \qquad \left. \left. \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \right\} \\ \cdot\ \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \dfrac{\partial (\bar{u}\,\bar{v})}{\partial x} + \dfrac{\partial (\bar{v}^2)}{\partial y} + \dfrac{\partial (\bar{v}\,\bar{w})}{\partial z} \\ \quad = F_y + \dfrac{\partial}{\partial x} \left\{ (\nu + \varepsilon) \left(\dfrac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) \right\} + \dfrac{\partial}{\partial y} \left\{ 2(\nu \right. \\ \qquad \left. + \varepsilon) \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \dfrac{p}{\rho} \right\} + \dfrac{\partial}{\partial z} \left\{ (\nu + \varepsilon) \left(\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \right. \right. \\ \qquad \left. \left. \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \right\} \\ \cdot\ \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \dfrac{\partial (\bar{u}\,\bar{w})}{\partial x} + \dfrac{\partial (\bar{v}\,\bar{w})}{\partial y} + \dfrac{\partial (\bar{w}^2)}{\partial z} \\ \quad = F_z + \dfrac{\partial}{\partial x} \left\{ (\nu + \varepsilon) \left(\dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) \right\} + \dfrac{\partial}{\partial y} \left\{ (\nu \right. \\ \qquad \left. + \varepsilon) \left(\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \right\} + \dfrac{\partial}{\partial z} \left\{ 2(\nu + \varepsilon) \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{p}{\rho} \right\} \end{cases}$$

となります。

ここで，$\bar{u}$，$\bar{v}$，$\bar{w}$ を u，v，w と書き表わし，

$\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$ を用いると，

$$\begin{cases} \cdot\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} \\ = F_x + \dfrac{\partial}{\partial x} \left\{ 2(\nu + \varepsilon) \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{p}{\rho} \right\} + \dfrac{\partial}{\partial y} \left\{ (\nu + \varepsilon) \right. \\ \qquad \left. \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} + \dfrac{\partial}{\partial z} \left\{ (\nu + \varepsilon) \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} \\ \cdot\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ = F_y + \dfrac{\partial}{\partial x} \left\{ (\nu + \varepsilon) \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \right) \right\} + \dfrac{\partial}{\partial y} \left\{ 2(\nu + \right. \\ \qquad \left. \varepsilon) \dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{p}{\rho} \right\} + \dfrac{\partial}{\partial z} \left\{ (\nu + \varepsilon) \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \right) \right\} \\ \cdot\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} \\ = F_z + \dfrac{\partial}{\partial x} \left\{ (\nu + \varepsilon) \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} + \dfrac{\partial}{\partial y} \left\{ (\nu + \right. \\ \qquad \left. \varepsilon) \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \right) \right\} + \dfrac{\partial}{\partial z} \left\{ 2(\nu + \varepsilon) \dfrac{\partial w}{\partial z} - \dfrac{p}{\rho} \right\} \end{cases}$$

となります。

上式中で，$\nu \ll \varepsilon$（∵動粘性係数 ν は分子運動に起因するが，渦動粘性係数 ε は分子に比べてはるかにスケールの大きい流体塊の混合によるものです)。

また，

$$\partial/\partial y\,(\partial v/\partial x),\ \partial/\partial z\,(\partial w/\partial x) \ll \partial/\partial y\,(\partial u/\partial y),\ \partial/\partial z\,(\partial u/\partial z)$$

$$\partial/\partial x\,(\partial u/\partial y),\ \partial/\partial z\,(\partial w/\partial y) \ll \partial/\partial x\,(\partial v/\partial x),\ \partial/\partial z\,(\partial v/\partial z)$$

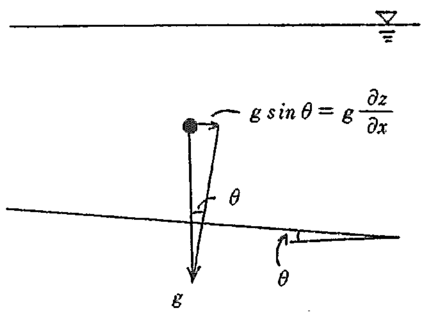
$$\partial/\partial x\,(\partial u/\partial z),\ \partial/\partial y\,(\partial v/\partial z) \ll \partial/\partial x\,(\partial w/\partial x),\ \partial/\partial y\,(\partial w/\partial y)$$

です。

一方，河川において，外力としては重力のみを考えればよいから，

$$F_x = -g\frac{\partial z}{\partial x},\quad F_y = -g\frac{\partial z}{\partial y},\quad F_z = -g$$

となります。



以上より，3次元の運動方程式は，

$$\left\{\begin{aligned}
&\cdot\ \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} \\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial z}\right) - g\frac{\partial z}{\partial x} \\
&\cdot\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} \\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial v}{\partial x}\right) + 2\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon\frac{\partial v}{\partial z}\right) - g\frac{\partial z}{\partial y} \\
&\cdot\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \\
&= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\
&\qquad + 2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) - g
\end{aligned}\right.$$

となります。

（文責　渡邊康玄）

参考文献

例えば，椿　東一郎，水理学Ⅰ，森北出版株式会社，1973年２月．

＊　　＊　　＊