

## 常流・射流混在場での不等流計算と河床変動計算

Practical Computations of Non-uniform Flow and  
Bed Deformation Under Co-existing Super-critical  
and Sub-critical Flow Conditions

渡邊 康玄\*      許士 達広\*\*  
村上 泰啓\*\*\*    崇田 徳彦\*\*\*

Yasuharu WATANABE, Tatsuhiko KYOSHI,  
Yasuhiro MURAKAMI and Naruhiko MUNETA

従来の不等流計算手法では、流れが常流の状態と射流の状態で計算の進める方向を変化させる必要があった。このため、常流・射流が混在する流れの場を計算することが非常に厄介な問題であった。そこで、今回流れの状態で計算の向きを変えなくてもよい手法を開発し、その適応性について検討を行った。室内実験および現地観測結果との比較において良好な再現性を示し、比較的簡単に常流・射流混在する流れの場の不等流計算および河床変動計算が可能となった。

〈不等流；河床変動；急流河川；洪水〉

In usual calculations of non-uniform flow, the direction of the calculation must be changed when the flow changes from super-critical to sub-critical or from sub-critical to super-critical. This calculation method is very troublesome when the flow alternates frequently. A new calculation method with no need to make such changes was developed, and its accuracy has been studied.

The calculations show good agreement with hydraulic model tests and field data. The usefulness of new calculation method for flow and bed variations under co-existing super-critical flow and sub-critical flow conditions was verified.

Keywords: non-uniform flow, bed deformation, rapidflow, flood.

## 1. はじめに

従来より実河川においては洪水流の再現、現況流下能力の把握および河道の縦断変化予測を行う場合、その再現性や計算の簡易性などの理由から広く一般に不等流計算が用いられてきている。既往の方法で不等流計算を行う場合、流れの状態に応じて計算の向きを変化させる必要がある。すなわち、流れの状態が常流の領域では下流側から上流側に向かって、また射流の領域では上流側から下流側に向かって水位を求めていくことになる。した

がって、常流・射流が流れの途中で変化する場合や常流・射流が混在する場合には常流と射流の変化点の位置を見だし、その地点で上流および下流側から求めてきた水位が一致するまで繰返し計算を行うことになる。このため、常流・射流が頻繁に変化する場合の水面形算出や急流河川の河床変動計算を行う場合の水位計算は非常に複雑なものとなり、実用的ではない。またこの煩雑さをなくすため、部分的に射流となるような場合は、射流となる部分の水深を限界水深で置き換えて上流側に計算を進めていく方法がとられている。水面形の概略を知る上で

\*河川研究室主任研究員    \*\*同室長    \*\*\*同室員

はこの程度の精度で十分と考えられるが、常流・射流が頻繁に変化する場合や河床変動に用いる場合は、限界水深で置き換えた部分で誤差が蓄積され問題がある。

河川においては、床固め工、河道狭窄部、河床勾配急変などが存在する場合や急流河川において常流・射流が混在する 경우가多々あり、長期の河床変動予測や河川構造物の効果影響などを把握することが困難であった。本報告では、これらの問題を解決するため、計算途中で人の手を介さず、比較的簡単に一連の計算で常流・射流混在場での水面形算出が可能となる方法について述べ、その適用性について検討を行った。

## 2. 基礎式および計算方法<sup>1),2)</sup>

### 2-1 基礎式

1次元の流れを解く基礎式は、河道断面が矩形の場合、(1)式で示される不等流方程式と(2)式で示される連続の式である。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\tau}{\rho h} \quad (1)$$

$$Q = A \cdot u \quad (2)$$

ここで、 $Q$ ：流量、 $u$ ：流速、 $h$ ：水深、 $\rho$ ：水の密度、 $x$ ：河川の谷軸方向下流向きにとった距離、 $g$ ：重力加速度、 $H$ ：水位、 $A$ ：河積、 $P$ ：圧力(= $\rho g H$ )、 $\tau$ ：河床のせん断力であり、抵抗則に河川で一般に用いられている Manning 則を用いることとすると、(3)式で表わされる。

$$\frac{\tau}{\rho} = g \frac{n^2 u^2}{h^{4/3}} \quad (3)$$

$n$  は、Manning の粗度係数である。

一方、河床変動に用いる基礎式は、流砂連続式および粒径別の連続式とし、それぞれ(4)式、(5)式で表わされる。

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{(1-\lambda)B} \frac{\partial (q_B \cdot B)}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$a \frac{\partial p_i}{\partial t} + p_i^* \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{(1-\lambda)} \left\{ \frac{1}{B} \frac{\partial (q_{Bi} \cdot B)}{\partial x} \right\} = 0 \quad (5)$$

$$p_i^* = \begin{cases} p_i (\partial z / \partial t) \geq 0 \\ p_{i0} (\partial z / \partial t) < 0 \end{cases}$$

ここで、 $z$ ：河床高、 $t$ ：時間、 $B$ ：川幅、 $\lambda$ ：河床砂の空隙率、 $q_B$ ：単位川幅当たりの流砂量、 $a$ ：交換層の厚さ、 $p_i$ ：粒径  $d_i$  の粒子が交換層内に占める割合、 $p_{i0}$ ：粒径  $d_i$  の粒子が原河床に占める割合、 $q_{Bi}$ ：粒径別の単位川幅当たりの流砂量である。

### 2-2 差分化

基礎方程式を差分化する場合、従来の方で行うと計算に方向性を持ち、常流・射流の流れの特性に合わせて

計算の向きを変えなければならない。そこで、不等流方程式を差分化する際、計算に方向性を持たせないよう不定流の計算方法であるリーブフログの方法<sup>1)</sup>を利用することとした。図-1に示した計算格子で差分化すると、(1)式の各項は(6)~(8)式となる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \hat{u}_j \frac{u_j - u_{j-1}}{(\Delta x_j + \Delta x_{j-1})/2} \quad (6)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{P_j - P_{j-1}}{\Delta x_j} \quad (7)$$

$$\frac{\tau}{\rho h} = \frac{g \cdot n^2}{2} u_j \cdot \hat{u}_j (h_j^{4/3} + h_{j-1}^{4/3}) \quad (8)$$

ここで、添え字の  $j$  は断面  $j$  の値であることを示し、 $\hat{u}_j$  は、繰返し計算のひとつ前のステップの  $u_j$  の値である。

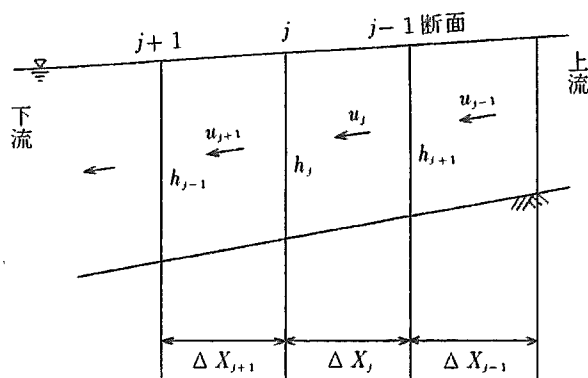


図-1 不等流計算格子

(6)~(8)式を(1)式に代入し、 $u_j$  について解くと(9)式となり、順次下流側に計算を進めることができる。

$$u_j = \frac{\beta_j - \gamma_j (P_j - P_{j-1})}{\alpha_j} \quad (9)$$

ただし、 $\alpha_j$ 、 $\beta_j$ 、 $\gamma_j$  は(10)~(12)式で表わされる。

$$\alpha_j = \frac{\hat{u}_j}{(\Delta x_j + \Delta x_{j-1})/2} + \frac{g \cdot n^2}{2} \hat{u}_j (h_j^{4/3} + h_{j-1}^{4/3}) \quad (10)$$

$$\beta_j = \frac{\hat{u}_j \cdot u_{j-1}}{(\Delta x_j + \Delta x_{j-1})/2} \quad (11)$$

$$\gamma_j = \frac{1}{\rho} \frac{1}{\Delta x_j} \quad (12)$$

一方、河道を矩形断面とすると(2)式の連続の式は(13)式となる。

$$Q_j = T_j (P_j - P_{j-1}) + G_j \quad (13)$$

ここで、 $T_j$ 、 $G_j$  は(14)、(15)式で表わされる。

$$T_j = -\frac{\gamma_j}{\alpha_j} \frac{h_j + h_{j-1}}{2} \frac{B_j + B_{j-1}}{2} \quad (14)$$

$$G_j = \frac{\beta_j}{\alpha_j} \frac{h_j + h_{j-1}}{2} \frac{B_j + B_{j-1}}{2} \quad (15)$$

計算の過程上  $Q_j$  は誤差を伴うため、この誤差を  $P$  で補正するものとする、流量  $Q$  は(16)式で表現される。

$$Q = Q_j + \Delta Q_j$$

$$= T_j \{ (P_j + \Delta P_j) - (P_{j-1} + \Delta P_{j-1}) \} + G_j \quad (16)$$

支川の流入などを考えなければ、各断面において流量は不変であることより、(17)式が成り立つ。

$$(Q_j + \Delta Q_j) - (Q_{j+1} + \Delta Q_{j+1}) = 0 \quad (17)$$

(17)式に(16)式を代入し整理すると、(18)式となる。

$$a_j \cdot \Delta P_j + b_j \cdot \Delta P_{j+1} + c_j \cdot \Delta P_{j-1} + d_j = 0 \quad (18)$$

ここに、 $a_j$ ,  $b_j$ ,  $c_j$ ,  $d_j$  はそれぞれ(19)~(22)式である。

$$a_j = T_j + T_{j+1} \quad (19)$$

$$b_j = -T_{j+1} \quad (20)$$

$$c_j = -T_j \quad (21)$$

$$d_j = T_j(P_j - P_{j-1}) + G_j - T_{j+1}(P_{j+1} - P_j) - G_{j+1} \quad (22)$$

(18)式を行列式で表わすと、(23)式となる。

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ 0 & c_{j-1} & a_{j-1} & b_{j-1} & 0 \\ 0 & & c_j & a_j & d_j \\ 0 & & & c_{j+1} & a_{j+1} & b_{j+1} \\ 0 & & & & 0 & c_{Nj} & a_{Nj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta p_1 \\ \Delta p_{j-1} \\ \Delta p_j \\ \Delta p_{j+1} \\ \Delta p_{Nj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_{j-1} \\ d_j \\ d_{j+1} \\ d_{Nj} \end{bmatrix} = 0 \quad (23)$$

ただし、 $N_j$  は計算断面数である。(23)式を三角化法などにより、 $\Delta P_j$  について解くことができる。

河床変動については、計算格子を図-2 のようにとると、(4)式は(24)式で差分化される。

$$\Delta z_{j+1} = \frac{1}{(1-\lambda)} \frac{q_{Bj} \cdot B_j - q_{Bj+1} \cdot B_{j+1}}{\Delta x_{j+1} \cdot B_{j+1}} \Delta t \quad (24)$$

なお、差分の方法は計算が最も安定した後進差分とした。(24)式より、上流の河床高変化量を定めることにより順次下流の河床高変化量を求めることができる。

また、粒径別の連続式(5)式は(25)式で差分化される。

$$p_{i,j}^{t+\Delta t} = p_{i,j}^t - \frac{1}{a} p_{i,j}^t \Delta z_j^{t+\Delta t} - \frac{1}{a(1-\lambda)} \frac{q_{bi,j}^{t+\Delta t} - q_{bi,j}^t}{\Delta x_{j+1}} \Delta t \quad (25)$$

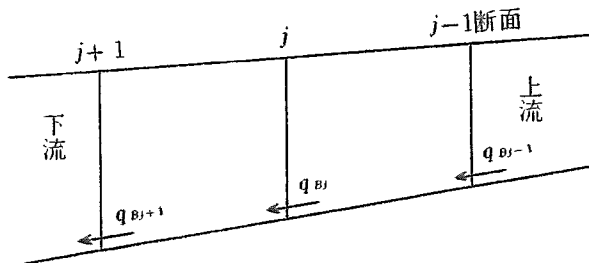


図-2 1次元河床変動計算格子

$$p_{i,j}^* = \begin{cases} p_{i,j} (\Delta z_j \geq 0) \\ p_{i0,j} (\Delta z_j < 0) \end{cases}$$

ここで、添え字の 't' は時刻 t の値を、添え字の 'i' は粒径  $d_i$  の粒子の値を示している。

### 2-3 境界条件と計算方法

初期値として、各断面に任意の水位と流速（通常、等流水深と等流流速）を与える。次に、(9)式を用いて上流から下流に向かって各断面の流速を更新する。さらに、下流端の水位  $H_0$ （起算水位）を一定 ( $\Delta P_{Nj} = 0$ ) とし、(23)式を用いて順次上流に向かって  $\Delta P_j$  を算出していき水位の更新を行っていく。水位と流速の更新は、各断面について(26)式を満足するまで繰り返す。

$$\left| \frac{Q_{cal} - Q}{Q} \right| < \delta \quad (26)$$

ここで、 $Q_{cal}$  : 計算された流量、 $\delta$  : 計算の打ち切り誤差で 0.01 程度の値。なお、流速、水位の更新方法は計算が発

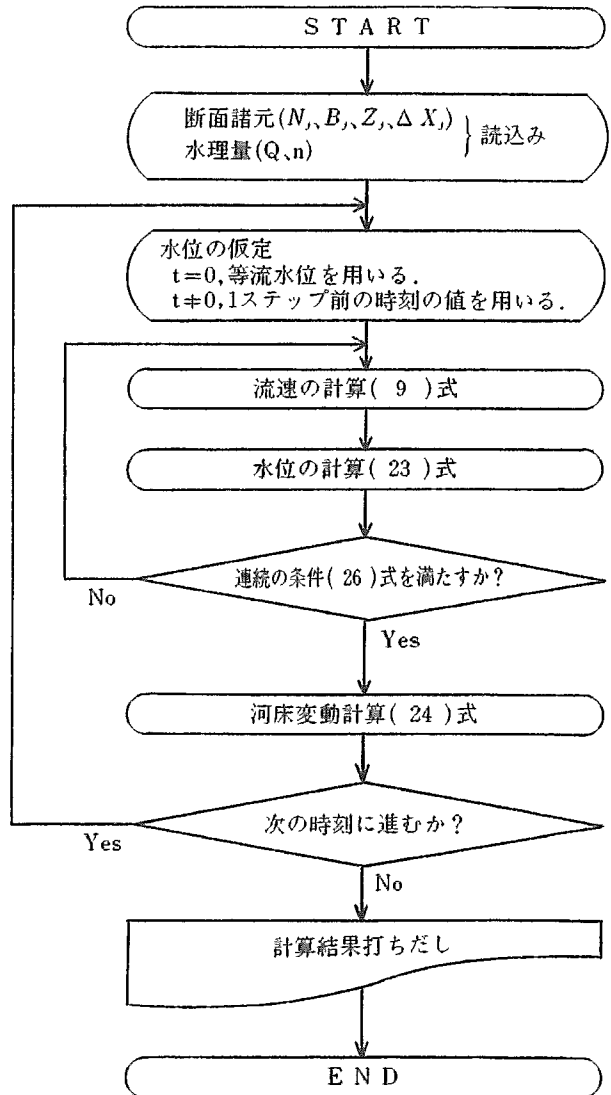


図-3 計算の流れ

散しないよう値を少しずつ変化させる必要があるため、(27)、(28)式を用いることとする。

$$u_j = \hat{u}_j(1-k) + ku_j \quad (27)$$

$$P_j = \hat{P}_j + k \cdot \Delta P_j \quad (28)$$

$k$  は緩和係数である。

一方、河床変動量は水位計算で求められた水理量を用い、(24)式から上流端の河床高変化量を境界条件として下流に向かって計算を進めることにより求められる。さらに、求めた河床高変化量から河床高変化後の河床材料粒径分布を(25)式を用いて算出する。

すなわち、図-3 に示したフローに従って計算を進めることになる。

### 3. 計算結果

#### 3-1 水面形の検証

本手法の妥当性を見るために、長さ10m、幅1mの直線水路にのり勾配1:10のマウンドを設け、流量0.08m<sup>3</sup>/sを通水した場合の水面形について、実験値と計算値の結果を図-4に示した。なお、比較のため従来より用いられてきた不等流計算結果もあわせて示した。実験では跳水が縦断距離8m付近で発生しているが、既往の不等流計算では7m付近となり、7~8mの区間で水位が実験値よ

りかなり大きめの値となってしまふ。一方、今回の計算方法では実験値に比べ若干跳水の位置は上流側にずれるもののその程度は小さく、既往の方法と比較してより実験値に近い値となっている。この実験のように、射流から常流に変化する部分で流速が急激に変化する場合、跳水が発生する付近の流れは2次元的流れが強まり、このことを無視し得なくなる。このため、跳水発生近傍の局所的な水面形の再現精度は落ちるが、跳水前後の水面形は実験値を精度よく再現しており、常流・射流が混在する流れの場合での水面形算出における本手法の有効性が示された。

#### 3-2 河床変動計算

前述の実験は固定床実験であったため、河床変動計算の妥当性を見るため、移動床実験結果と計算結果の比較を行った。

図-5は、板倉ら<sup>3)</sup>が行った縮流部を持つ水路の概要である。長さ15.3m、幅1.0m、勾配1/330の直線水路に前後1.75mのすりつけ部を持つ長さ1.8m、幅0.2mの縮流部を設けている。河床材料は中央粒径0.91mmであり、上流端で給砂を行っている。移動床実験結果と今回提案する不等流計算手法を用いた河床変動計算結果との比較を、図-6に示した。なお、河床変動計算は、最も解

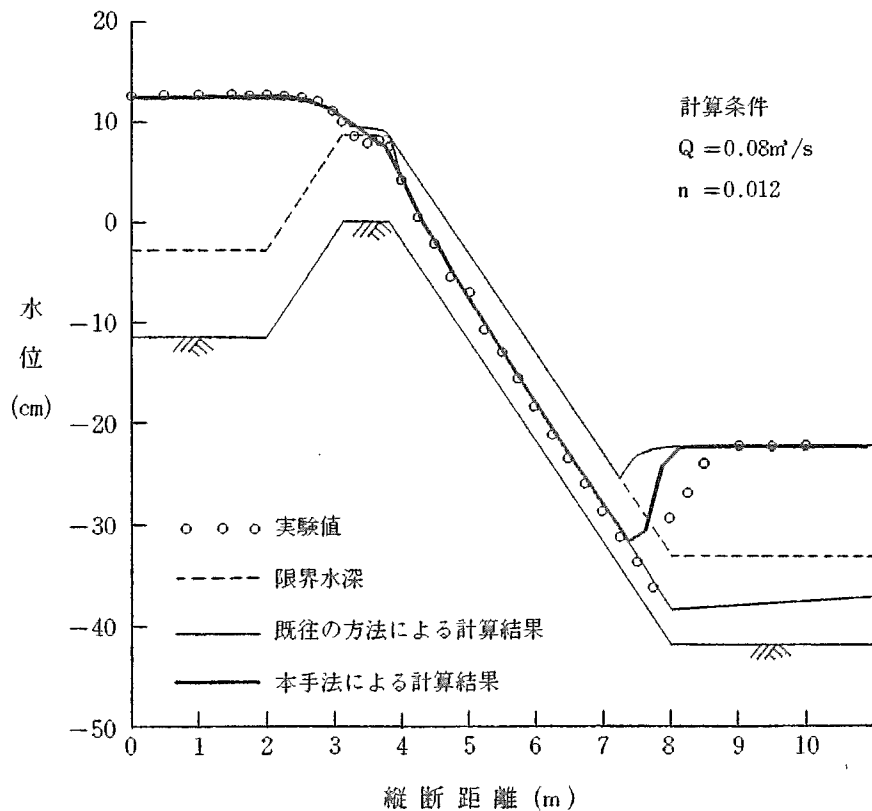


図-4 水面形比較

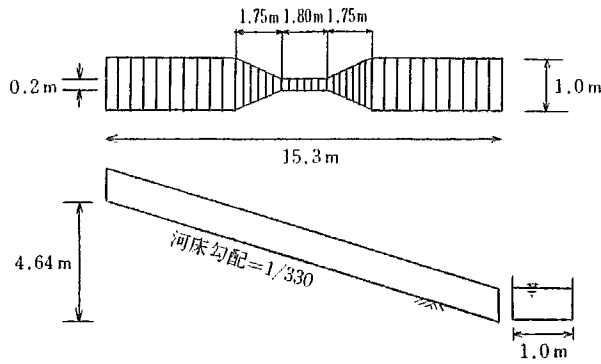


図-5 縮流部を持つ実験水路

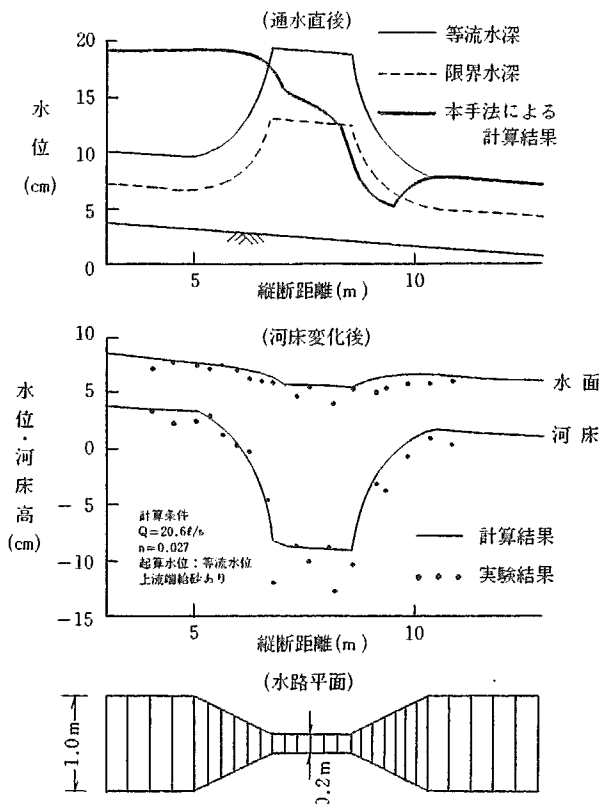


図-6 河床変動計算結果

が安定した後進差分を用い、流砂量式は(29)式で示される土研式とした。

$$\frac{q_{Bi}}{\sqrt{sgd_i^3}} = \rho_i \psi f \tau_{*i}^{3/2} \quad (29)$$

ここで、 $s$ ；河床材料の水中比重、 $\psi$ ；定数(=0.4)、 $\tau_{*i}$ ；粒径  $d_i$  の粒子の無次元掃流力、 $f$ ；土研式の流砂関数である。初期通水時の水面形は実験において測定されていないため、河床高変化後の計算結果のみを示した。これより、流れは通水初期に縮流部において射流となっていると判断される。一方、河床変化後の水面形を見ると、流れは全区間常流と判断される。すなわち、流れは常流・

射流混在状態から河床の変化により常流状態へと変化していったものと考えられる。通水後の河床形状について実験値と計算結果を比較すると、縮流部における河床の凹凸までは再現されていないが、全体的な河床形状の傾向は十分に再現されている。このように、常流・射流が混在し、しかも通水中に流れの状態が変化する流れの場合における河床変動計算も、本手法を用いることで計算途中で人の手を介さず一連の計算が可能となる。

### 3-3 床止め工を有する河道の河床変動計算への適用

床止め工を含む河床変動計算を行う場合、床止め工個所で流れが部分的に射流となるばかりでなく、床止め工を必要とする河川は急流河川であり常流・射流混在するような流れであるため、上下流一連の計算を行うことは水位計算が複雑になり、実用的ではなかった。このことから、前項までに述べた計算手法を床止め工が存在する場合の河床変動計算に用い、その実用性について検討を行った。

床止め工を有する河道の河床変動として、福田ら<sup>4)</sup>が行った実験を再現することとする。実験水路は、図-7に示す長さ10m、幅0.3mの直線水路で、上流6mを固定

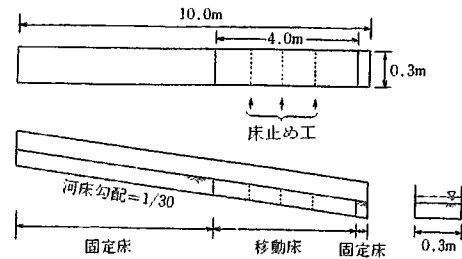


図-7 床固め工を含む実験水路

床、下流4mを移動床とし、床止め工を3基配置している。この水路に、流量0.4 l/sで300分給砂なしで通水した河床形を測定している。実験に用いられた河床材料は平均粒径1.4 mmの混合砂であり、用いた流砂量式は実験結果から土研式を修正した(30)式を用いた。

$$\frac{q_B}{\sqrt{sgd^3}} = 13.0 f \tau_*^{2.7} \quad (30)$$

実験結果と計算結果を図-8に示す。実験結果では全体的に洗掘傾向にあり、床止め工上流部では洗掘が抑えられているが、その直下流部では激しい洗掘を受けている。計算結果では、実験結果の縦断形をほぼ再現しているものの、床止め工直上流部で堆積傾向を示している。このことは、実測の水面形が測定されていないため比較はできないが、床止め工直上流部の水面形を正確には再現していないことを示していると思われる。また、実験では

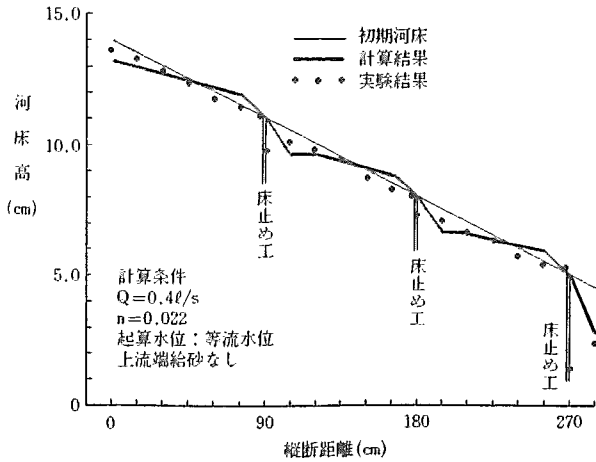


図-8 河床変動計算結果

床止め工の部分で河床形が段落ち状になっているものの、計算では段落ちなどの不連続な河床を表現できない。このため、床止め工直下流部の洗掘が表現できず、この部分で実測値との差が大きくなっている。しかし、床止め工直下流の実験値と1ステップ下流の計算値との大きさがほぼ同程度であることから、床止め工下流部の計算区間距離を小さくすることで、ある程度緩和することが可能であると思われる。このように、床固め工の存在する河川の河床変動を、上流から下流まで区間を切らずに一連の計算で行うことが概略ではあるが可能となる。

#### 4. 河川（急流河川）の水面形算出への適用

河川は複断面河道を有している場合が多く、単断面の場合でも横断方向に河床が凹凸しているため、河道断面は矩形と見なすことができる場合が少ない。このため、前項までの水位計算手法を任意の形状をもつ河道に適用できるように改良を行った。

##### 4-1 基礎式および差分化

1次元計算であることより同一断面内では、水位、水面勾配および流速は一定値をとるが、水深は各測点で異なる。このことを考慮して、不等流の式を表現すると(31)式となる。

$$\textcircled{a} u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \int_0^B \left( \frac{\tau}{\rho h} \right) dy \quad (31)$$

ここで、 $\textcircled{a}$ ；エネルギー補正係数、 $y$ ；左岸からの横断方向距離である。(31)式の各項を差分化すると、(32)~(34)式となる。

$$\textcircled{a} u \frac{\partial u}{\partial x} = \textcircled{a} \hat{u}_j \frac{u_j - u_{j-1}}{(\Delta x_j + \Delta x_{j-1})/2} \quad (32)$$

$$\textcircled{a} = \frac{\phi}{\phi^3} A_{\text{①}}^2$$

$$A_{\text{①}} = \sum_{m=1}^{Nm} \{ h_{\text{①}, m} \cdot \Delta y_{\text{①}, m} \}$$

$$\phi = \sum_{m=1}^{Nm} \left\{ \frac{1}{n_{\text{①}, m}^3} h_{\text{①}, m}^3 \cdot \Delta y_{\text{①}, m} \right\}$$

$$\phi = \sum_{m=1}^{Nm} \left\{ \frac{1}{n_{\text{①}, m}} h_{\text{①}, m}^{5/3} \cdot \Delta y_{\text{①}, m} \right\}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{P_j - P_{j-1}}{\Delta x_j} \quad (33)$$

$$\int_0^B \left( \frac{\tau}{\rho h} \right) dy = \frac{g \cdot \hat{u}_j \cdot u_j \cdot A_{\text{①}}^2}{\phi^2} \quad (34)$$

ただし、添え字の①は流速と同一断面の値を示し、 $m$ は横断方向測点  $m$  の値を示す。また  $Nm$  は横断方向分割数である。これより、流速  $u_j$  を(9)式で表わすと、 $\alpha_j$ 、 $\beta_j$ 、 $\gamma_j$  はそれぞれ(35)~(37)式となる。

$$\alpha_j = \frac{\phi / \{ (\Delta x_j + \Delta x_{j-1}) / 2 \} + \phi \cdot g \cdot A_{\text{①}}^2 \cdot \hat{u}_j}{\phi^3} \quad (35)$$

$$\beta_j = \frac{\phi / \{ (\Delta x_j + \Delta x_{j-1}) / 2 \}}{\phi^3} A_{\text{①}}^2 \cdot u_{j-1} \cdot \hat{u}_j \quad (36)$$

$$\gamma_j = \frac{1}{\rho} \frac{1}{\Delta x_j} \quad (37)$$

以下、矩形断面の場合と同様に解くことができる。

##### 4-2 計算結果

急流河川である石狩川水系豊平川における昭和63年11月24日出水を、K. P. 14.8~K. P. 17.2の区間について再現を行った。同区間は、床止め工3基を含み、K. P. 16.56には幌平橋水位観測所がある。また、同出水は低水路満杯程度で流下し、時刻20:30、21:00、21:30、22:30の4回縦断同時水位の観測が行われた。図-9に幌平橋の流量観測結果を示した。同図より、今回の縦断

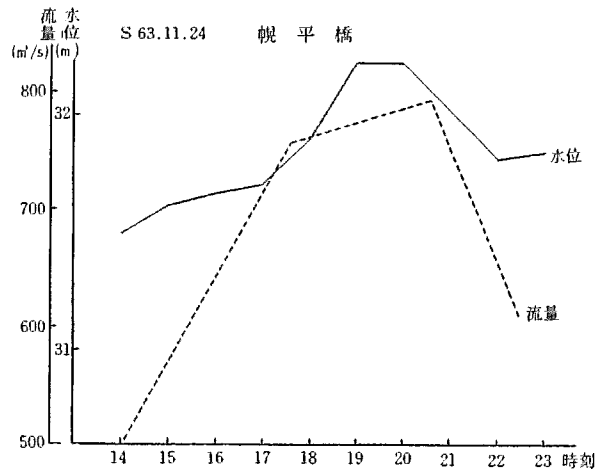


図-9 幌平橋水位、流量

同時水位測定はピークを少し過ぎた時刻に行われていることがわかる。時刻20:30と21:30についての再現結果を図-10、11に示す。今回の方法は、比較的よく実測値（左岸水際高）を再現している。しかし、K. P. 16.3~K. P. 16.5(6, 7号床止め工)付近およびK. P. 15.7~K. P.

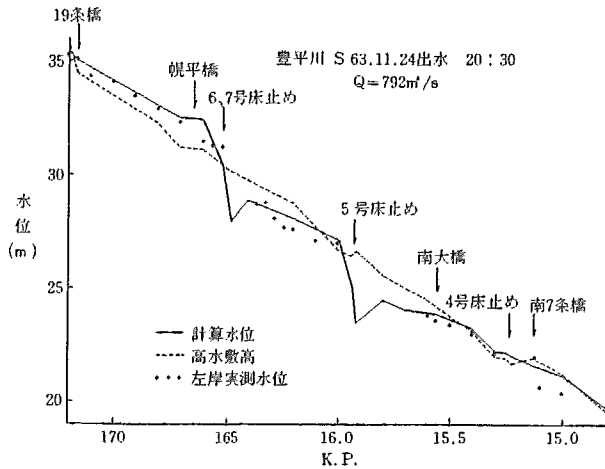


図-10 Q=792 m<sup>3</sup>/s 水位計算結果

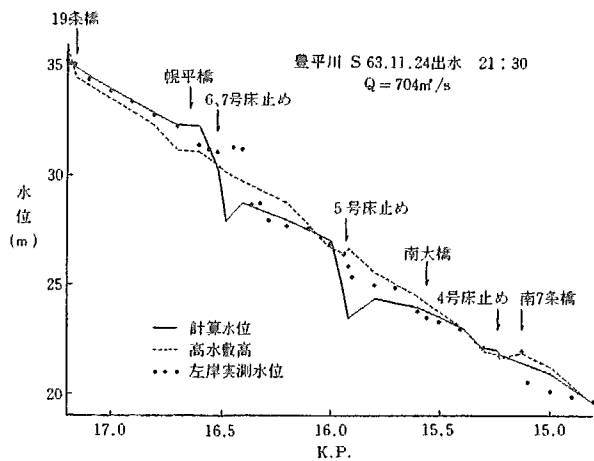


図-11 Q=704 m<sup>3</sup>/s 水位計算結果

16.0(5号床止め工)付近では大きく実測値を下まわっている。この理由は、実際の流れは河床の凹凸などにより常流から射流あるいは射流から常流に急激に変化せず、ある程度広い範囲で複雑に跳水を起こしているが、1次元計算ではこのことが表現できず急激に変化する計算となっているためである。特に6,7号床止め工付近の不一致は、この区間の上流側で高水敷に乗っている流れが下流側では低水路内に納まって流れていることに起因している。すなわち、実際には高水敷を流れてきた流れがある程度まで高水敷上を流れ、その後徐々に低水路に落込んでいくことを1次元の計算では表現できず、床止め工部分で跳水を起こし、すぐに低水路に集まって流下する結果となるためである。また、実測値では橋の直上流部で水位

がせき上がっているのに対し、計算では橋脚による河積の減少を見積っていないため水位が低く算出されている。このように、部分的に実測値に合わない箇所もあるが、ほぼ実測値を精度よく再現しており、今回の不等流計算手法の実河川への適用も可能と判断される。

## 5. おわりに

河川の中でも、特に急流河川における洪水再現のための不等流計算や河床変動の長期予測のための河床変動計算を行うことは、流れの状態(常流, 射流)が頻繁に変化し非常に厄介な問題であったが、本手法による不等流計算を行うことで、比較的簡単に行うことが可能となった。

しかし、複断面を有する河道における流水が高水敷から低水路へ落込む流れや平面的に分布する跳水など、流れが2次元的な挙動を示す箇所での実測値との不一致がみられる。このことは、1次元計算の限界とも考えられるが、今後さらに急流河川の流れについて調査し、モデルの改良も含め、さらに再現性の向上のために検討を行っていく必要がある。また、常流・射流が混在する場の不等流計算の基礎式は、厳密に言えば保存形でなければならないが、本手法では簡単のため、保存形とはなっていない。このことから、本手法の適用限界についても今後把握するつもりである。

本研究を進めるにあたり、計算手法などで当研究所河川研究室の清水康行氏に御指導をいただいた。ここに、記して謝意を表します。

## 参考文献

- 1) 渡邊康玄, 許士達広; 常・射流混在流れの河床変動計算, 第32回昭和63年度北海道開発局技術研究発表会講演概要集(3), 平成元年2月.
- 2) 清水康行, 板倉忠興; 河川における2次元流れと河床変動の計算, 北海道開発局土木試験所報告第85号, 昭和61年10月.
- 3) 岸力, 板倉忠興ほか; 断面急変部における流れと河床変動に関する研究, 昭和62年度北海道大学委託研究報告, 昭和63年3月.
- 4) 土木試験所; 昭和60年度砂防ダム水理模型実験業務報告書, 昭和60年11月.