

開水路流れにおける2次元及び3次元モデルの比較

開発土木研究所河川研究室 清水 康行

はじめに

開発土木研究所河川研究室では、数年来3次元性を有する河川流を数値的に計算する手法の開発を行っている。計算モデルは考慮する方向性により、1次元から3次元に大別される。このうち、1次元モデル（不等流計算、不定流計算などがこれにあたる）については、河川の蛇行や河道内に発生する砂州の影響を考慮しにくいことから実河川で起きる様々な現象を詳しく求めることは難しい。2次元モデルについても、本来3次元の広がり性を有する河川流を2次元の数値モデルに置き換えるためには様々な仮定が必要であり、その適用限界も明らかにする必要がある。本報告では、2次元および3次元モデルを湾曲部を有する実験水路および河川に適用し、その結果を実測値と比較することによりそれぞれのモデルの特徴および適用限界について考察を行うものである。

1. 基礎方程式と計算法

流下方向に s 軸、鉛直方向に z 軸、 s 軸に直交する流路の横断方向に n 軸をとり、水圧に静水圧分布を仮定した場合の流れの連続式および運動方程式は以下のとおりである。

$$\frac{1}{1-N} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v}{(1-N)R} + \frac{\partial v}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u}{1-N} \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{uv}{(1-N)R} \\ & = -\frac{g}{1-N} \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{1-N} \frac{\partial \tau_{ss}}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{ns}}{\partial n} + \frac{\partial \tau_{zs}}{\partial z} - 2 \frac{\tau_{ns}}{(1-N)R} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{u}{1-N} \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial v}{\partial n} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u^2}{(1-N)R} \\ & = -g \frac{\partial H}{\partial n} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{1-N} \frac{\partial \tau_{ns}}{\partial s} + \frac{\partial \tau_{nn}}{\partial n} + \frac{\partial \tau_{zn}}{\partial z} + \frac{\tau_{ss} - \tau_{nn}}{(1-N)R} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (4)$$

ここに、 u, v および w はそれぞれ s, n および z 軸方向の流速成分、 H は水位、 R は流路中央の曲率半径、 p は圧力、 ρ は水の密度、 g は重力加速度である。 $1-N = 1-n/R$ は流路の流下方向および横断方向の曲率半径の変化を表すための関数である。 $\tau_{ss}, \tau_{ns}, \tau_{zs}, \tau_{nn}, \tau_{zn}$ および τ_{zz} は、互いに独立なせん断力テンソルである。通常、一般河川における流れは、十分に発達した乱流であり粘性作用は無視可能である。一方、流れに極端な急拡や急縮、剝離等が存在しない場合、乱流流れにおける混合作用は主として河床せん断力と河床からの距離に依存すると考えるのが自然であり、この仮定のもとにせん断力テンソルの各成分を下記のように表す。

$$\tau_{ss} = 2\rho\varepsilon \left[\frac{1}{1-N} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{v}{(1-N)R} \right], \quad \tau_{nn} = 2\rho\varepsilon \left[\frac{\partial v}{\partial n} \right] \quad (5)$$

$$\tau_{zz} = 2\rho\varepsilon \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right], \quad \tau_{zs} = \rho\varepsilon \left[\frac{1}{1-N} \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial z} \right]$$

$$\tau_{zn} = \rho\varepsilon \left[\frac{\partial w}{\partial n} + \frac{\partial v}{\partial z} \right], \quad \tau_{ns} = \rho\varepsilon \left[\frac{1}{1-N} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{u}{(1-N)R} + \frac{\partial u}{\partial n} \right]$$

ここに、 ε は渦動粘性係数であり、ここでは次式の表現を採用する。

$$\varepsilon = \kappa u_* z (1-z/h) \quad ; z/h \leq 0.2 \quad (6a)$$

$$\varepsilon = \kappa u_* h / \beta \quad ; z/h > 0.2 \quad (6b)$$

ここに、 κ はカルマン常数 (=0.4)、 u_* は摩擦速度、 h は水深、 β は定数 (=6.24) である。(z 軸の原点は河床にとってある。) (6) 式は、Rattaray ら¹⁾により提案されているものであり開水路等流の水路中央部の流れにおいては最も精度の良い流速解を与える表現である。

yasuyuki SHIMIZU

(1) ~ (4) 式に (5) および (6) 式の関係を用い、河床から水面まで平均することにより以下の式が得られる。

$$\frac{1}{1-N} \frac{\partial \langle u \rangle h}{\partial s} - \frac{\langle v \rangle h}{(1-N)R} + \frac{\partial \langle v \rangle h}{\partial n} = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-N} \frac{\partial \langle u \rangle^2}{\partial s} + \frac{\partial \langle u \rangle \langle v \rangle}{\partial n} - \frac{2 \langle u \rangle \langle v \rangle}{(1-N)R} \\ & + \frac{1}{1-N} \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial s} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial n} - \frac{2 \langle u'v' \rangle}{(1-N)R} \\ = & -\frac{g}{1-N} \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{2}{1-N} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\langle \varepsilon \rangle \partial \langle u \rangle}{1-N} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\langle \varepsilon \rangle \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial n} \right) - \frac{(\tau_{zs})_b}{\rho h} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1-N} \frac{\partial \langle u \rangle \langle v \rangle}{\partial s} + \frac{\partial \langle v \rangle^2}{\partial n} + \frac{\langle u \rangle^2 - \langle v \rangle^2}{(1-N)R} \\ & + \frac{1}{1-N} \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial s} + \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial n} + \frac{\langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle}{(1-N)R} \\ = & -g \frac{\partial H}{\partial n} + \frac{1}{1-N} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\langle \varepsilon \rangle \partial \langle v \rangle}{1-N} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\langle \varepsilon \rangle \frac{\partial \langle v \rangle}{\partial n} \right) - \frac{(\tau_{zn})_b}{\rho h} \end{aligned} \quad (9)$$

ここに、 $\langle \rangle$ は水深方向の平均値を表し、 $'$ は水深方向の平均値からの差を表す (例えば $u(z) = \langle u \rangle + u'(z)$)。下付き添字 b は河床の値であることを示す。 $(\tau_{zs})_b$ および $(\tau_{zn})_b$ はそれぞれ s 軸および n 軸方向の河床せん断力であり、以下の式で表される。

$$\frac{(\tau_{zs})_b}{\rho} = C_b u_b \sqrt{u_b^2 + v_b^2} \quad (10)$$

$$\frac{(\tau_{zn})_b}{\rho} = C_b v_b \sqrt{u_b^2 + v_b^2} \quad (11)$$

ここに、 C_b は河床の摩擦係数であり u_b および v_b は河床における s 軸および n 軸方向の滑り速度 (slip velocity) である。(10) および (11) 式は、(2)、(3) 式の右辺第 4 項および (8)、(9) 式の右辺第 4 項に境界条件として与えられる。(6) 式中の摩擦速度 u_* は $(\tau_{zs})_b$ および $(\tau_{zn})_b$ を用いて次式で求められる。

$$u_*^2 = \frac{\sqrt{(\tau_{zs})_b^2 + (\tau_{zn})_b^2}}{\rho} \quad (12)$$

河岸または側壁においては $v=0$ および、 s 軸、 z 軸方向の河岸の滑り速度成分 u_w および w_w が次式の形で境界条件として与えられる。

$$\frac{(\tau_{ns})_w}{\rho} = C_w u_w \sqrt{u_w^2 + v_w^2} \quad (13)$$

ここに $(\tau_{ns})_w$ は s 軸方向の側岸せん断力であり、 C_w は側岸の摩擦係数である。流れが常流の場合、上流端で流速 u および $v(=0)$ を、下流端で水位 H を境界条件として与える。

本文の目的は、2次元および3次元モデルの比較であるがここでは両者の比較と併せて2次元モデルと3次元モデルの中間的な意味をもつ準3次元モデルも含め以下に示す3通りの計算方法の比較を行う。

<モデル1：2次元モデル> 水深方向の流速分布を無視し ($u = \langle u \rangle, v = \langle v \rangle$) (8)、(9) 式の u' および v' を含む項を総て無視し、いわゆる2次元浅水流モデル²⁾として計算を行う。この場合の計算に用いる式は、(7) ~ (9) 式である。

<モデル2：準3次元モデル> 計算に用いる式は水深平均されたもの ((7) ~ (9) 式) であるが、水深方向の流速分布は無視しない。この場合、 u の分布式には渦動粘性係数に (6) 式用いた場合の等流流れの流速分布式である次式を用いる。

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\xi}{\xi_0} \quad ; \xi \leq 0.2 \quad (14a)$$

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left[\frac{0.2}{\xi_0} + \beta(\xi - 0.5\xi^2 - 0.18) \right] \quad ; \xi > 0.2 \quad (14b)$$

ここで、 $\xi = z/h$ 、 $\xi_0 = z_{0b}/h$ であり z_{0b} は河床の粗度高さである。 v の分布には以下に示す Smith and McLean³⁾ による湾曲部の2次流の式を用いる。

$$v = -\frac{hu_*}{r} \left(\frac{F_2}{F_1} f_1 - f_2 \right) + \langle v \rangle \frac{f_1}{F_1} \quad (15)$$

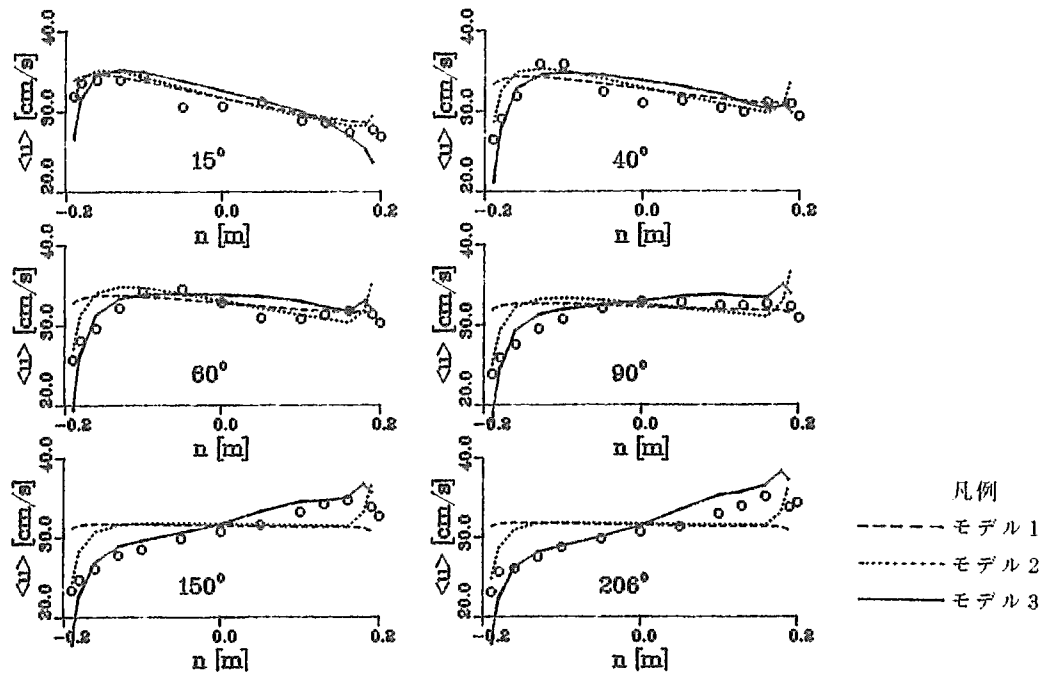


図-2 一様湾曲水路における水深平均流速 $\langle u \rangle$

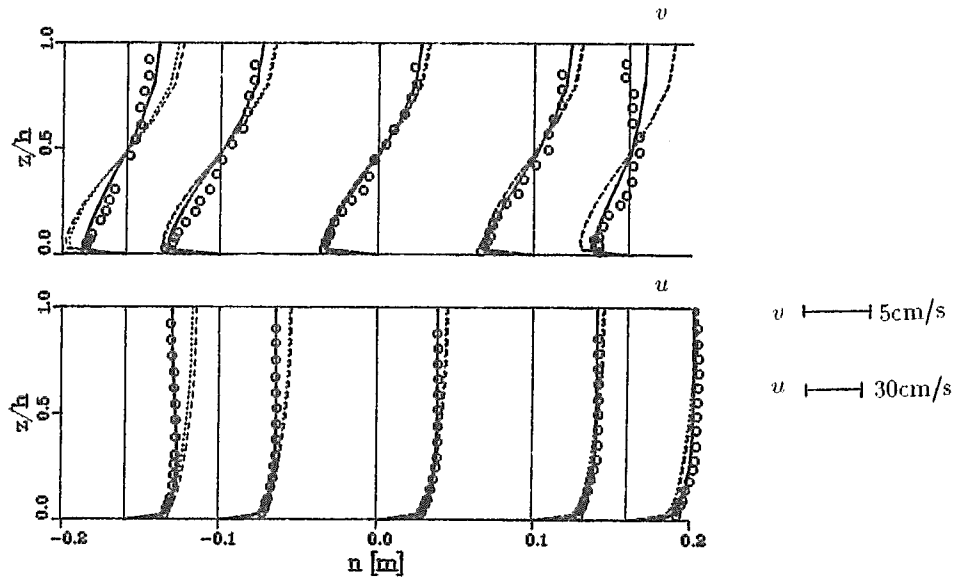


図-3 一様湾曲水路 (206°地点) における水深方向流速分布 (a) u および (b) v

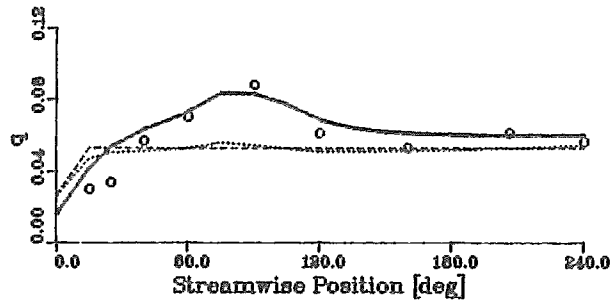


図-4 一様湾曲水路中央に沿った2次流強度 q の分布

図-5および図-6はMuddy Creekにおける水深平均流速 $\langle u \rangle$ および河床せん断力 $(\tau_{rs})_b$ の実測値と計算結果の比較である。ここで各断面の番号は図-1(b)に示した位置に対応する。Muddy Creekにおける計算結果をみると、各モデルの違いはほとんど無く、いずれのモデルにおいても実測値との適合度は良好である。一様湾曲水路においては外岸が速くならなかったモデル1および2も、ここでは、図-5の断面番号20および22における外岸部で実測値と同様に外岸が速くなっている。この理由は、河床の砂州により外岸が深くなっており、この深みに沿った流れ(2次元の平面的な流れ)が現象の大局を決定し、2次流による3次元的な効果が相対的に小さくなっているためと考えられる。さらに、Muddy Creekのように左右に蛇行が続く水路では、前述の2次流の発達、減衰、安定という過程が完了する前に曲率が反転するために、一様湾曲部の流れに見られたような3次元的な流況が顕著にならないものと推定される。したがって、この場合においては、あえて複雑なモデル3を用いなくとも、最も単純なモデル1でも十分に流れを計算することが可能となっている。

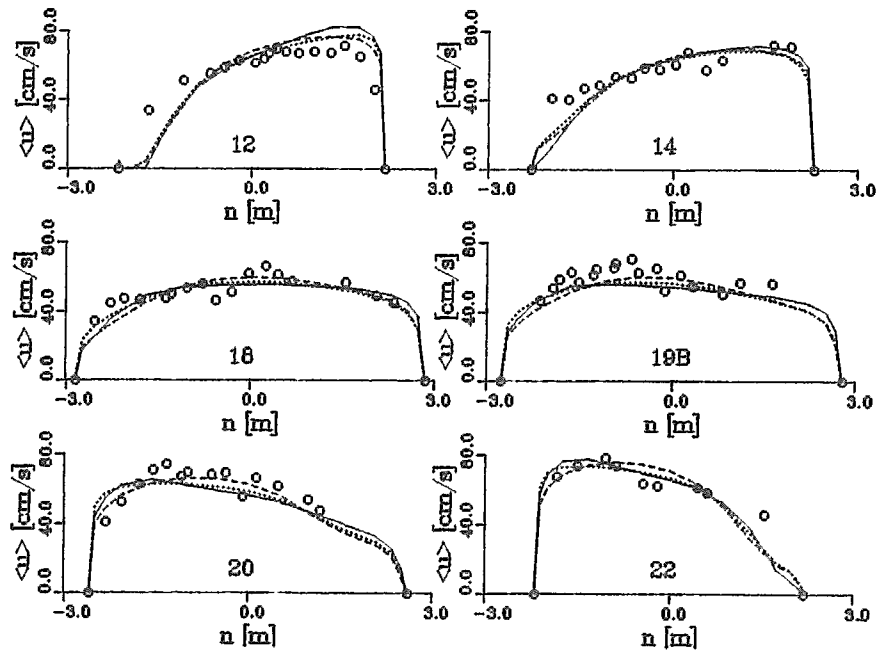


図-5 Muddy Creekにおける水深平均流速 $\langle u \rangle$

ただし、

$$f_1 = \frac{u}{u_m}, \quad F_1 = \int_{\xi_0}^1 f_1 d\xi \quad (16)$$

$$f_2 = \int_{\xi_0}^1 \frac{1}{\kappa} \int_{\xi'}^1 f_1^2 d\xi'' d\xi', \quad F_2 = \int_{\xi_0}^1 f_2 d\xi$$

<モデル3：3次元モデル> 上記のような仮定をせずに(1)～(3)式を直接用いて3次元の流れ場を計算する。

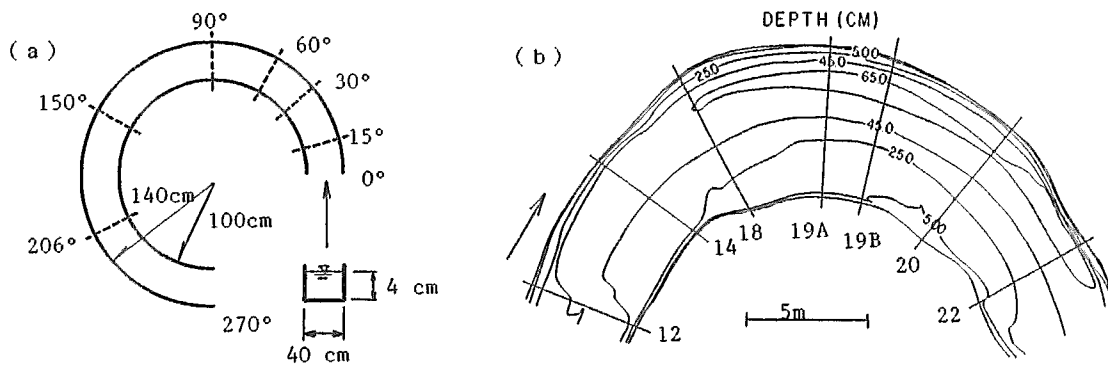


図-1 計算モデルの適用水路形状

2. 適用例

各モデルを図-1に示す2種類の水路に適用する。図-1(a)は菊池ら⁴⁾による270°の一樣曲率の湾曲水路であり河床形は横断方向に水平な矩形断面である。また、図-1(b)はDietrich and Smith⁵⁾により測定された米国ワイオミング州 Muddy Creek の蛇行部である。Muddy Creek では左右に対称な蛇行部が流下方向に連続的に続き、水路内には内岸に砂州、外岸に深掘れが形成され、沖積地の蛇行河川における典型的な河床地形が見られる。

一樣湾曲水路における水深平均流速の実測値と計算結果の比較を図-2に、206°の断面における水深方向の流速分布の実測と計算の比較を図-3に示す。ここで、実測値は白丸で、計算結果のうち破線はモデル1、点線はモデル2、実線はモデル3を示す(以下の図でも同様)。ただし、図-3のモデル1による流速分布はモデル1の計算結果を用いてモデル2と同様の方法で水深方向の流速分布を再計算したものである。図-2によると、湾曲部の入口近く(15°～60°)ではどのモデルも実測値と大きな違いは無く、内岸が外岸より速くなる実測値の特徴を良く表している。しかしながら、流下方向へ進むにつれ、実測値は外岸側が速くなりモデル1および2ではこれをうまく表現できなくなる。この結果、図-3に示す湾曲部後半の断面206°においてはモデル1、2ともに実測の u および v とは大きく違った結果になっており、唯一モデル3のみが実測結果に適合した結果となっている。

モデル1および2では一樣湾曲水路の流れを正確に計算できない理由を調べるために2次流の発達および減衰を示す無次元量 q を次式で定義し、この値の水路中央の実測値と計算結果の比較を図-4に示す。

$$q = \frac{1}{\langle u \rangle h} \int_0^h |v| dz \quad (17)$$

図-4に示すように一樣湾曲水路における2次流は水路の入口から流下方向に向かって一旦発達するがその後減衰し、ほぼ一定の値に落ち着く傾向が見られる。これは、湾曲部の入口で発達した2次流によって水深方向に運動量の交換が行われ、これにより流下方向の流速 u の水深方向の分布形状が対数則的な分布とは異なるようになり(極端な場合には最大流速が水面下に現れる、例えば図-3の最も内岸側の u の分布)、この結果2次流の起動力である水深方向の遠心力の違いが小さくなり、2次流が弱まるものと考えられる。この様な現象は、完全に3次元的な現象であり、本文中扱うモデルのなかでは唯一モデル3のみにより再現可能である。従って、ここで示したような湾曲部が流下方向に長く続くような条件においては、3次元モデルが必要となる。

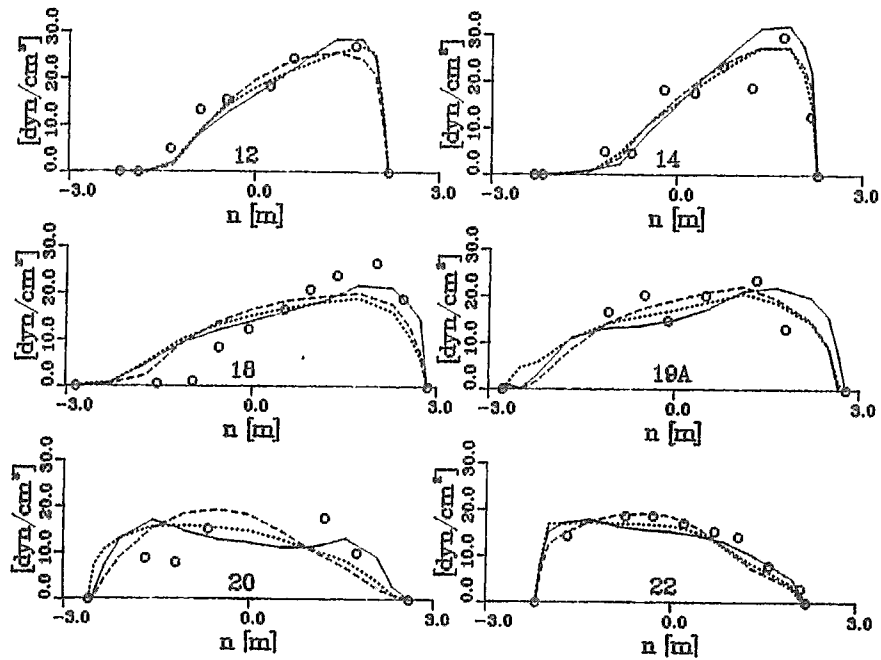


図-6 Muddy Creekにおける河床せん断力 (τ_{xs})_b

おわりに

本文では河川流の予測計算手法としての数値計算モデルについて、各種のモデルの比較検討を行ったが、これらのモデルは、河川の改修や構造物等の効果や影響の検討に使用されるべく開発が行われたものである。そこで、本文における検討結果および今までの著者による経験から実際の河川計画に応用するに際しての注意事項を以下にまとめて示す。

・ 3次元モデルを用いる必要がある場合

- (1) 河床に砂州や深掘れの存在しない状態（例えば人工水路の改修直後や、土砂移動の少ない河川）。
- (2) 湾曲部が長く続く蛇曲河川でとくに川幅に対して水深の深い条件の河川（目安としては川幅／水深が10以下）。
- (3) 構造物周辺の局所的な流れや分合流点を含む流れを予測しようとする場合。

・ 2次元モデルでも精度上問題が無い場合

- (1) 河床の砂州や深掘れが安定した状態にある河川（改修後長い年月が経った状態で毎年起こる様な程度の流量規模における条件）。
- (2) 蛇行の程度が緩やかで左右に蛇行が連続している河川で川幅に対して水深があまり大きく無い場合（川幅／水深が10以上）。

なお、構造物周辺や分合流点を含む流れの予測については、本文で述べたような3次元モデルでも不十分な場合が多い。これは、構造物の周辺では非常に複雑な流れが生じ本文の3次元モデルが行っているような静水圧分布の仮定や、渦動粘性係数を単純に河床からの距離の関数とすることが許されないためである。また、いままで行ってきた数値計算法（1次精度の風上差分）は非常に安定な解を求めるには有効な方法であるが人工的な粘性が強く入り過ぎる傾向も見られる。今後多くの解決すべき問題が存在する。

参考文献

- 1) Rattray, M. Jr. and Mitsuda E.: Theoretical analysis of conditions on a salt wedge, Estuaric and Coastal Marine Science, 2, pp.373-394, 1974.
- 2) Shimizu, Y. and Itakura, T.: Calculation of bed variation in alluvial channels, J. Hydraul. Div. ASCE, 115(3), pp.367-384, 1989.
- 3) Smith, J.D. and McLean, S.R.: A model for flow in meandering streams, Water Resour. Res., 20(9), pp.1301-1315, 1984.
- 4) 菊池雅彦, 池田俊介, 山坂昌成: 湾曲部の三次元流れに関する基礎的研究, 土木学会第43回年次学術講演会, pp.254-255, 1988.
- 5) Deitrich, W.E. and Smith, J.D.: Influence of the point bar through curved channels., Water Resour. Res., 19(5), pp.1173-1192.