現場のための水理学 (2)

——一般断面における不等流計算——

中津川 誠　清水康行

2-4　一般断面の不等流計算

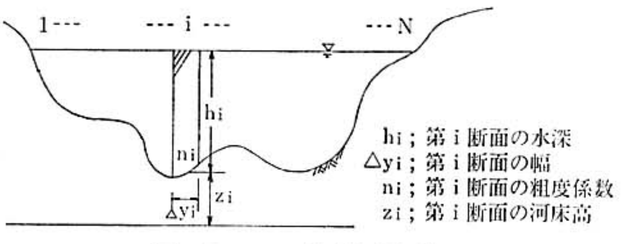
一般の河川は，高水敷があったり，河床でも凹凸があったりして，矩形の単断面で表わされるようなものはかなり稀な例といえます。そこで，本節では前節より飛躍して，一般断面の不等流計算法について解説していきたいと思います。

ところで，このように，潤辺に多くの凹凸がある場合でも，用いられる基礎式は先に示した不等流の式と同じような形で，

$$\frac{dH}{dx}+\frac{d}{dx}\left(\alpha\frac{V^2}{2g}\right)+i_e=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.28)$$

と表わすことができます。ただし，第二項目の α は新しくでてきた $\boxed{\text{エネルギー補正係数}}$ というもので，定義づけが必要です。また，平均流速 V やエネルギー勾配 i_e についても凹凸のある全断面の平均値なので，単断面のように簡単にだすことはできません。

そこで，このような断面を図-2.7のように小さな矩形のブロックに分けて考えることが有効となります。



図—2.7　一般断面形

全断面を幅 $\varDelta y$ で N 個の細かいブロックに分割し，第 i ブロックの諸量について考えると，ここでの断面積は，

$$\varDelta a_i=h_i\cdot\varDelta y_i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.29)$$

ここで，h_i；i ブロックの水深，$\varDelta y_i$；i ブロックの断面幅

また，分担流量は，

$$\varDelta q_i=u_i\varDelta a_i=u_ih_i\varDelta y_i \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.30)$$

となります。

ここで，u_i は i ブロックにおける平均流速を表わしており，先に示したマニングの公式から算出できます（式(2.7)参照)。

$$u_i=\frac{1}{n_i}r_i^{2/3}i_e^{1/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.31)$$

上式の中で，r_i は i ブロックの径深であり，断面積を潤辺で除して求められますが，図-2.7で表わされるように，ブロック分けした細かい矩形断面の潤辺は，断面幅 $\varDelta y_i$ に近似できることが一見してわかることから，

$$r_i\fallingdotseq\varDelta a_i/\varDelta y_i=h_i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.32)$$

となることがわかります。これを式(2.31)に代入すると，

$$u_i=\frac{1}{n_i}h_i^{2/3}i_e^{1/2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.33)$$

となります。

なお，n_i は i ブロックのマニングの粗度係数，i_e はエネルギー勾配を表わしています。

ゆえに式(2.30)は，

$$\varDelta q_i=\left(\frac{1}{n_i}h_i^{2/3}i_e^{1/2}\right)(h_i\varDelta y_i)=\left(\frac{1}{n_i}h_i^{5/3}\varDelta y_i\right)i_e^{1/2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.34)$$

ところで，上式の総和が断面における全流量となることから，

$$Q=\sum_{i=1}^{N}\varDelta q_i=\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{n_i}h_i^{5/3}\varDelta y_i\right)i_e^{1/2} \quad \cdots\cdots(2.35)$$

となります。ここで，エネルギー勾配 i_e は，断面のいたるところで近似的に一定とみなせることから，上式より，

$$i_e=\frac{Q^2}{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n_i}h_i^{5/3}\varDelta y_i\right)^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.36)$$

と表わすことができます。

また，新たにでてきたエネルギー補正係数 α は，

$$\alpha=\frac{\sum_{i=1}^{N} u_i^3 \Delta a_i}{V^3 A}=\frac{\sum_{i=1}^{N} u_i^3 \Delta a i}{(Q^3/A^2)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.37)$$

ここで，u_i；i ブロック平均流速

　　Δa_i；i ブロック断面積

　　V；全断面平均流速　A；全断面積

と表わされることがわかっており，これを諸量の定義に従って書き改めると，

$$\alpha=\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{n_i} h_i^{2/3} i_e^{1/2}\right)^3 h_i \Delta y_i}{\left\{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n_i} h_i^{5/3}\Delta y_i i_e^{1/2}\right)^3 \Big/ A^2\right\}}=\frac{A^2\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{n_i^3} h_i^3 \Delta y_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n_i} h_i^{5/3}\Delta y_i\right)^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.38)$$

となります。

ゆえに，式(2.28)は式(2.36), (2.38)などより，

$$\frac{dH}{dx}+\frac{d}{dx}\left(\alpha\frac{V^2}{2g}\right)+i_e$$

$$=\frac{dH}{dx}+\frac{1}{2g}\frac{d}{dx}\left[\frac{A^2\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{n_i^3} h_i^3 \Delta y_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n_i} h_i^{5/3}\Delta y_i\right)^3}\cdot\frac{Q^2}{A^2}\right]$$

$$+\frac{Q^2}{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n_i} h_i^{5/3}\Delta y_i\right)^2}=\frac{dH}{dx}+\frac{1}{2g}\frac{d}{dx}\cdot$$

$$\left[\frac{Q^2\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{n_i^3} h_i^3 \Delta y_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n_i} h_i^{5/3}\Delta y_i\right)^3}\right]+\frac{Q^2}{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n_i} h_i^{5/3}\Delta y_i\right)^2}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.39)$$

となるわけです。

一見複雑でむずかしそうな式ですが，根底には不等流の基本式(2.28)があることを念頭において下さい。また式(2.39)が，一般断面における不等流計算の基礎式となるので，しっかりと使えるようにしておきましょう。なお，先にでてきたエネルギー補正係数 α の意味について詳しく知りたい方は，他の水理学解説書を参照して下さい。

それでは，以上で得られた式を使って実際の計算に取組んでみましょう。まず，その前に例によって基礎式(2.39)を差分表示して，計算のできる形に書き換えておきます。ただし，上流側断面を1，下流側断面を2として，各々の諸量に添字としてそれらの番号を付すとします。

$$\left[H_2+\frac{Q^2\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{n_{2i}^3} h_{2i}^3 \Delta y_{2i}\right)}{2g\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n_{2i}} h_{2i}^{5/3}\Delta y_{2i}\right)^3}+\frac{\Delta x}{2}\frac{Q^2}{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n_{2i}} h_{2i}^{5/3}\Delta y_{2i}\right)^2}\right]$$

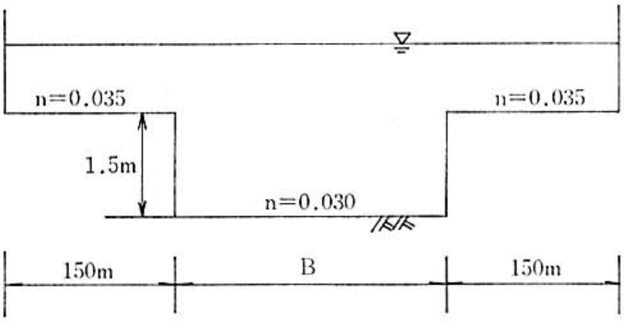
$$=\left[H_1+\frac{Q^2\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{n_{1i}^3} h_{1i}^3 \Delta y_{1i}\right)}{2g\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n_{1i}} h_{1i}^{5/3}\Delta y_{1i}\right)^3}-\frac{\Delta x}{2}\frac{Q^2}{\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{n_{1i}} h_{1i}^{5/3}\Delta y_{1i}\right)^2}\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.40)$$

これで準備は整いました。以後は，各自が演習問題をとおして実践力を養っていって下さい。

(演習問題 4)

図-2.8に示すように複断面河川において，流量 $Q=1500\ m^3/s$ が流下した場合の水面形および分担流量を求めよ。ただし，低水路幅，低水路の河床高および計算断面の断面間隔は表-2.11に示されるものとする。また，下流端の低水路の水深は 2.5 m とする。



図—2.8　演習問題における断面形

表—2.11　演習問題における河道諸元

断面番号	下流端からの距離 (m)	河床高 (標高) z(m)	河幅 B(m)
1	0	0	300
2	500	0.5	320
3	1000	0.9	280
4	1200	0.8	250
5	1800	2.0	300
6	2100	2.3	300
7	2500	3.0	320
8	3000	3.0	350
9	3300	3.5	300
10	3800	4.0	250

〔演習問題4の解答（緩和係数法）〕

(1) 考え方

基礎式は式(2.40)であり，これを便宜上，下記のように表わす。

$$H_2+AA\frac{\varphi(h_2)}{\{\phi(h_2)\}^3}+BB\frac{1}{\{\phi(h_2)\}^2}$$
$$=H_1+AA\frac{\varphi(h_1)}{\{\phi(h_1)\}^3}-BB\frac{1}{\{\phi(h_1)\}^2}\quad\cdots\cdots①$$

ただし，

$$AA=Q^2/2g\quad\cdots\cdots②$$

$$BB=\frac{Q^2\Delta x}{2}\quad\cdots\cdots③$$

$$\varphi(h)=\sum_{i=1}^{N}\frac{h_{(i)}^3}{n_{(i)}^3}\Delta y_{(i)}\quad\cdots\cdots④$$

$$\phi(h)=\sum_{i=1}^{N}\frac{h_{(i)}^{5/3}}{n_{(i)}}\Delta y_{(i)}\quad\cdots\cdots⑤$$

常流なので，下流から上流に向かって計算を行う。すなわち，下流側水深 h_2 を既知とし，①式を満たすような上流側水深 h_1 を求めればよい。今，①式の左辺を $F2$，右辺を $F1$ とおくことにすると，$F2=F1$ を満たすような h_1 を求めればよいことになる。

解答では，緩和係数法による解法を示す。

緩和係数法とは，$F=F2-F1$ として，$|F|<\varepsilon$（打切り誤差）となるような h_1 を求める方法の1つであるが，その手順を以下に示す。

i) h_1 になんらかの仮定値を代入し，$F=F2-F1$ の F を計算（$F2$ は①式の左辺，$F1$ は①式の右辺）。

ii) $|F|>\varepsilon$ のとき，$h_1=h_1+\beta F$ によって h_1 を更新する。このときの β を緩和係数と称し，$0.1\leqq\beta\leqq1.5$ くらいの値をとる。

iii) 更新した h_1 をもって F を計算する。

iv) $|F|<\varepsilon$ となるまで上記の手順を繰返す。

緩和係数法は更新時の計算式が簡単なので，1回当たりの計算は短かくなるという利点はあるが，β に適当な値を与えないと繰返し回数が増え，かえって時間がかかる場合もあるので注意を要する。なお，経験上 β は0.8程度がよいようである。

(2) 実際の計算

(1)で示した考え方をもとに，以下に1断面目を例に計算の過程を示す。

i) 流量 $Q=1500\ \mathrm{m^3/s}$，重力加速度 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$，下流側水深（左岸高水敷 $h_2(1)=1.0$ m，低水路 $h_2(2)=2.5$ m，右岸高水敷 $h_2(3)=1.0$ m），粗度係数（左岸高水敷 $n(1)=0.035$，低水路 $n(2)=0.03$，右岸高水敷 $n(3)=0.035$），下流側川幅（左岸高水敷 $B_2(1)=150$ m，低水路 $B_2(2)=300$ m，右岸高水敷 $B_2(3)=150$ m），上流側川幅（左右岸高水敷 $B_1(1)$，$B_1(3)$ は $B_2(1)$，$B_2(3)$ と同じ，低水路 $B_1(2)=320$ m），下流側河床高 $z_2=0$ m，上流側河床高 $z_1=0.5$ m（河床高は低水路のもの），断面間距離 $\Delta x=500$ m といった諸条件設定。

ii) 上流側水深を以下のように仮定する。

左岸高水敷　$h_1(1)=h_2(1)=1.0$
低　水　路　$h_1(2)=h_2(2)=2.5$
右岸高水敷　$h_1(3)=h_2(3)=1.0$

iii) $F2$ の計算を行う（①式の左辺）。

④式より　$\varphi(h_2)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\{h_2(i)\}^3}{\{n_2(i)\}^3}B_2(i)=0.1806\times10^9$

⑤式より　$\phi(h_2)=\sum_{i=1}^{3}\frac{\{h_2(i)\}^{5/3}}{n_2(i)}B_2(i)=0.5462\times10^5$

$$F2=H_2+\frac{Q^2}{2g}\frac{\varphi(h_2)}{\{\phi(h_2)\}^3}+\frac{Q^2\Delta x}{2}\cdot\frac{1}{\{\phi(h_2)\}^2}=2.816$$

ただし，H_2 は下流側の水位であり $H_2=h_2(2)+z_2$，z_2 は低水路の河床高。

iv) 下流側断面の分担流量 $\Delta q_2(1)\sim\Delta q_2(3)$ を計算。

i 測線の分担流量 $\Delta q_{(i)}$ は式(2.34)より，

$$\Delta q_{(i)}=\frac{1}{n_{(i)}}\Delta y_{(i)}h_{(i)}^{5/3}i_e^{1/2}$$

エネルギー勾配 i_e は式(2.36)より計算できる。

したがって，

$\Delta q_2(1)=117.692\ \mathrm{m^3/s}$

$\Delta q_2(2)=1264.620\ \mathrm{m^3/s}$

$\Delta q_2(3)=117.692\ \mathrm{m^3/s}$

v) $h_1(1)\sim h_1(3)$ の仮定値をもとに $F1$ の計算を行なう（①式の右辺）。

④式より　$\varphi(h_1)=0.1922\times10^9$

⑤式より　$\phi(h_1)=0.5769\times10^5$

$$F1=H_1+\frac{Q^2}{2g}\frac{\varphi(h_1)}{\{\phi(h_1)\}^3}-\frac{Q^2\Delta x}{2}\frac{1}{\{\phi(h_1)\}^2}=2.946$$

ただし，H_1 は上流側の水位であり $H_1=h_1(2)+z_1$，z_1 は低水路の河床高。

vi) F の計算

$F=F2-F1=2.816-2.946=-0.130$

vii) 打切り誤差を $\varepsilon=0.0001$ とし，$|F|>\varepsilon$ ならば，水

深を以下のように更新。なお，緩和係数βは0.7とした。

左岸高水敷　$h_1(1)=h_1(1)+\beta F=1.0+0.7\times(-0.130)=0.909$

低　水　路　$h_1(2)=h_1(2)+\beta F=2.5+0.7\times(-0.130)=2.409$

右岸高水敷　$h_1(3)=h_1(3)+\beta F=1.0+0.7\times(-0.130)=0.909$

viii)　vii) の更新値$h_1(1)\sim h_1(3)$をもって$F1$を計算し，Fを求める。

ix)　$|F|<\varepsilon$となるまでvii), viii)に示すような手順を繰返す。$|F|<\varepsilon$となったときの$h_1(1)\sim h_1(3)$が正解である。

この正解値は，

左岸高水敷　$h_1(1)=0.888$ m

低　水　路　$h_1(2)=2.388$ m

右岸高水敷　$h_1(3)=0.888$ m

さらに，これらをもってiv)のように分担流量を求めると，

左岸高水敷　$\Delta q_1(1)=100$ m^3/s

低　水　路　$\Delta q_1(2)=1299$ m^3/s

右岸高水敷　$\Delta q_1(3)=100$ m^3/s

なお，収束にいたるまでの計算の経緯を表-2.12に示す。

(3)　計算機プログラムの概要

後述の補遺 [4] 参照。

(4)　計　算　結　果

結果を表-2.13および表-2.14に示す。表中のHは水位，$H1$が右岸高水敷水深，$H2$が低水路水深，$H3$が左岸高水敷水深，また，$Q1$が右岸高水敷分担流量，$Q2$が低水路分担流量，$Q3$が左岸高水敷分担流量を表わすものである。

以上，解答作成者　渡辺和好

表―2.12　計算の経緯　　$\varepsilon=0.0001$

回数	左岸高水敷 $h_1(1)$	低水路 $h_1(2)$	右岸高水敷 $h_1(3)$	誤差 F	判定
1	1.000	2.500	1.000	−0.13013	$\|F\|>\varepsilon$
2	0.909	2.409	0.909	−0.02476	$\|F\|>\varepsilon$
3	0.892	2.392	0.892	−0.00433	$\|F\|>\varepsilon$
4	0.889	2.389	0.889	−0.00073	$\|F\|>\varepsilon$
5	0.888	2.388	0.888	−0.00013	$\|F\|>\varepsilon$
6	0.888	2.388	0.888	−0.00002	$\|F\|<\varepsilon$

表―2.13　計算結果（水位，水深）

No.	水位 H (m)	右岸高水敷水深 $H1$ (m)	低水路水深 $H2$ (m)	左岸高水敷水深 $H3$ (m)	収束回数 NN (回)	誤差 F
1	2.500	1.000	2.500	1.000	0	0.00000
2	2.888	0.888	2.388	0.888	6	−0.00002
3	3.311	0.911	2.411	0.911	4	0.00008
4	3.510	1.210	2.710	1.210	9	0.00004
5	4.104	0.604	2.104	0.604	5	0.00009
6	4.550	0.750	2.250	0.750	7	0.00003
7	5.053	0.553	2.053	0.553	5	−0.00003
8	5.668	1.168	2.668	1.168	7	0.00009
9	5.812	0.812	2.312	0.812	8	−0.00003
10	6.358	0.858	2.358	0.858	4	0.00002