

北海道開発局における洪水予測システムの現状について

The Status Quo of Flood Forecasting Systems in Hokkaido Development Bureau

北海道開発局開発土木研究所

星 清

1. はじめに

治水対策はハード面の整備とソフト面の整備に大別される。ハード的対策とは、文字通り、ダム、遊水地、河川改修等の治水施設の整備向上を図り、洪水に対する安全度を高めることを目的としている。治水施設整備の現状をマクロ的に捉えれば、大河川では当面の整備目標を戦後最大洪水対応に置いているが、その整備率は約60%である。また、中小河川の都市域では整備目標を時間雨量50mm対応としているが、その整備率も約50%と必ずしも高水準とは言えない。

さらに、治水施設整備が進むにつれて、人口・資産が洪水防御対象区域に集中する傾向がますます顕著となってきており、とりわけ大都市周辺への集中が著しい。たとえば、全国第2位の流域面積をもつ石狩川流域は北海道の約20%の面積を有しており、この流域には280万人（北海道全人口の約50%）が生活を営み、資本の高度集積化が進んでいる地域である。上記の現象は我が国だけの問題ではなく、世界の大都市圏がかかえる大きな悩みの種でもある。治水施設の整備水準の向上は一朝一夕にできるものではなく、財政上の問題、時間的制約、社会的要因に強く影響される。

一方、ソフト的対策とは、洪水生起時の被害を極力最小限にとどめるため、的確かつ迅速な洪水情報収集伝達体制の整備・強化を図ることを目的としている。洪水は自然現象である降雨に起因する以上、異常出水が発生する可能性は常に存在する。かりに、洪水氾濫という事態が生ずれば、人口・資産が高度に集中化している河川流域では、従来にも増して壊滅的な被害を受ける危険にさらされている。このため、近年、洪水予報、水防警報システム開発の重要性が認識されるようになってきている。建設省が全国的規模で毎年行っている「水防演習」、
「出水時の情報伝達演習」、
「ダム管理演習」も治水のソフト的対策の一環として位置づけられる。

北海道開発局においても、ここ数年来、電子計算機や通信機器の進歩と相まって、洪水情報の収集・処理・伝達を機能的に行うことを目的とした河川情報システムの導入がはかられている。同時に、洪水生起時の災害防止・軽減のために、的確かつ迅速な洪水予報を確立することを目的とした、いわゆる洪水オンライン予測システムの開発が進められている。本報告ではとくに、石狩川で実運用されているカルマン・フィルター理論を取り入れた洪水予測手法を紹介する。

2. 洪水予測システムの構成

洪水流出の逐次予測は、時々刻々入手される観測値情報（降雨・水位）をもとに数時間先の流出予測を行うという点で、オンライン予測と呼ばれることが多い。洪水流出オンライン予測の構成要素をマクロ的にとらえたのが図-1である。

洪水流出予測に伴う最大の難点は降雨予測であろう。近年、アメダスや雨量レーダなどの観測体制の整備に伴い、この情報を取入れた豪雨の短期予測が研究レベルで推進されているが、実用面での活用にあたってはまだ越えなければならない壁がいくつか残されている。アメダスや雨量レーダから得られる観測情報量は膨大であり、データ処理と予測演算に要する時間短縮が今後の課題となろう。北海道開発局においても、すでに2基、今後2基の雨量レーダ設置が予定されており、レーダ観測情報をいかに効率よく洪水予測システムに反映していくかを検討しておく必要がある。

洪水流出のオンライン予測においても、流出モデルを選択しなければならない。洪水防御施設操作、洪水予報の伝達、避難・水防活動などの緊急度を考慮すると、計算があまりかかりすぎる複雑なモデルは極力さけるべきである。計算の迅速さという観点からは、流出系の非線形性を比較的単純な構造式で表現できる貯留関数モデルが有利である。どのような予測理論を採用しようとも、予測値と実測値には誤差が生ずる。この差は降雨予測の不正確さと観測値誤差にも起因するが、流出モデルの不完全さによる影響も大である。したがって、ハイドログラフの形状特性を的確に表現できる貯留関数モデル構造式の決定が流出逐次予測のために不可欠である。

最後に、降雨予測と流出予測ともなんらかの予測理論が必要となる。現段階では計算容量も少なく、計算も容易なカルマン・フィルター理論の適用が洪水流出の逐次予測に最も威力を発揮する一手法と考えられている。特にカルマン・フィルターは予測値の誤差分散を逐次推定していくので予測精度を知るのに有効である。

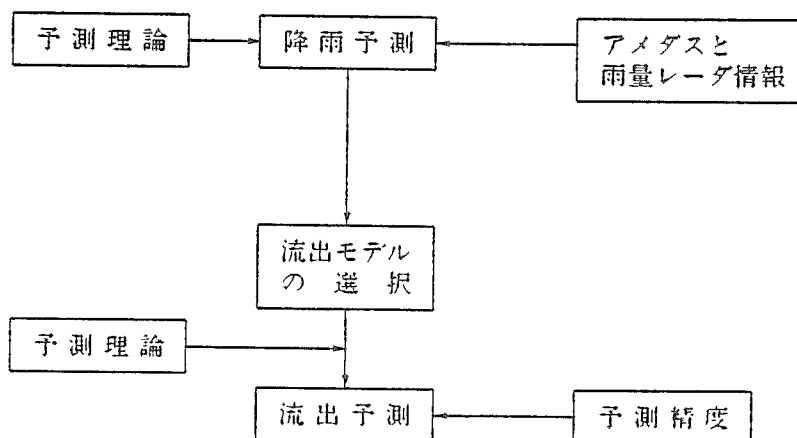


図-1 洪水流出予測の構成要素

3. カルマン・フィルターの基本概念

カルマン・フィルター理論は、1960年にカルマン (*Kalman*) によって発表された論文に由来する。¹⁾ この理論は、本来機械系の線系システムの最良状態変量推定法として考え出されたものである。カルマン・フィルター理論を初めて洪水流出のオンライン予測問題に適用したのは日野である。^{2),3)} その後、水工学の多くの問題にカルマン・フィルターが適用され、その有効性が検証されている。^{4),5)}

カルマン・フィルター理論はむずかしすぎてよく理解できないという声がしばしば聞かれる。確かに、原論文¹⁾は難解であり、フィルター理論の誘導過程を理解するためには相当の確率過程論の習熟が必要である。しかしながら、カルマン・フィルター理論の一連の公式結果はそうむずかしいものではなく、行列演算の基礎知識があれば、容易にプログラムを組むことができることも事実である。実務者は行列演算を毛嫌いする向きがあるが、行列演算には規則があるわけで、みずから行列を展開してみることを奨める。むしろ、カルマン・フィルター理論を実際に運用する際の課題は、当該問題をどのように理論適用可能なように定式化するかにかかっており、この作業が終れば、一連の公式を機械的に運用していけばよいことになる。

カルマン・フィルター理論がどうして洪水予測に適しているかをまず知ってもらう意味で、この理論のいくつかの特徴を以下に示すことにする。

- (a) 実務者が実際に洪水予測を行う場合、予測した値と実測値との間に差が生ずれば、最新の観測値に基づいて、その差異に手加減を加えて次の予測値を出そうとする意識が働くはずである。カルマン・フィルターは人間の経験的直感による予測に近いことを計算機で自動的に行える。したがって、洪水予測にあまり熟練を要しない。
- (b) 洪水時には、時々刻々受信される水文テレメータ情報を活用して、流出予測の信頼性を高める必要がある。カルマン・フィルターはオンライン予測に威力を発揮できる手法である。
- (c) どのような方法によっても予測値には必ず誤差が伴う。カルマン・フィルターは予測値の誤差分散（予測精度）を自動的に算定する。したがって、予測値の信頼区間を知ることができる。
- (d) 最良推定値を得る方法として回帰分析法が多用されている。この方法では長いデータを必要とする場合が多い。カルマン・フィルターは最新の観測値により推定値を逐次更新してゆく。したがって、過去の長い水文量情報を必要としないので、計算機のデータ容量が少なくてすむ。

カルマン・フィルター理論は洪水逐次予測を行う上で上記4個の特徴を有しているが、その理論がどのような構造式から成り立っているかを理解してもらうために、簡単な例題をとりあげる。今、洪水予測問題に焦点をしばって、われわれが流量を予測する手段としてどんな方法があるかを考えてみると、下記の2つの方法がまず頭に浮かぶ。

- (I) なんらかの数学的モデル（たとえば、貯留関数法）を使う方法

(II) 水位観測から水位～流量曲線を用いて流量に変換する方法

実は、カルマン・フィルター理論は上記2方法による情報に基づいて流量推定値の最適値を得ようとするものである。換言すれば、上記2つの方法によっても、われわれは流量の“真値”を知ることとはできず、必ず誤差を伴う。われわれは“真値”にできるだけ近い推定値を得ようとしているのである。カルマン・フィルター理論においては、(I)をシステム方程式、(II)を観測方程式と呼んでいる。

(I)の方法によるシステム方程式は、次のように定式化される。

$$z_1 = x + v_1 \quad (1)$$

ここで、 z_1 ：数学的モデルによる流量の推定値、 x ：流量の“真値”(われわれにはわからない)、 v_1 ：モデル化による誤差

洪水流出解析に用いられている流出モデルは相当数にのぼる。したがって、採用流出モデルによって流量推定値 z_1 も異なり、それに伴ってモデル誤差 v_1 も変化することがわかる。カルマン・フィルター理論においては、 v_1 の値を知る必要はない代わりにその平均値と分散を規定しなければならない。すなわち、

$$E(v_1) = 0 \quad (2)$$

$$\sigma_1^2 = E(v_1^2) \quad (3)$$

(2)式は、不偏推定値であるための条件であり、(3)式はモデル誤差の分散である (v_1 の平均値がゼロであることに注意する)。また、 $E(\cdot)$ は期待値演算子である。

(II)の方法による観測方程式は、次のように定式化される。

$$z_2 = x + v_2 \quad (4)$$

ここで、 z_2 ：水位～流量曲線の変換から得られる流量推定値、 x ：(1)式と同様に流量の“真値” v_2 ：流量観測精度に依存する観測誤差

水位～流量曲線作成にあたっては、低水・高水の広範囲にわたって流量観測がなされていることが望ましい。最近、洪水観測体制が整備されつつあるが、出水時の流量観測には種々の困難が伴う。もし仮に水位～流量曲線が低水時の流量観測資料のみによって作成されている場合には、洪水ピーク近傍での流量推定精度は相当に低いことを覚悟しなければならない。したがって、洪水ピーク近傍における水位～流量曲線による流量推定値 z_2 とそれに伴う観測誤差 v_2 が大きくなることは容易に想像できよう。

(3)式のモデル誤差 v_1 と同様に、観測誤差 v_2 についてもその平均値と分散を次のように規定する。

$$E(v_2) = 0 \quad (5)$$

$$\sigma_2^2 = E(v_2^2) \quad (6)$$

(5)式は不偏推定値であるための条件であり、(6)式は観測誤差 v_2 の分散を与える式である (v_2 の平均値は(5)式に示されるように、ゼロであることに注意)。

(1), (4)式に示されるカルマン・フィルタ理論におけるシステム方程式と観測方程式ができたので、いよいよ流量の最良推定値 \hat{x} をどのように算定したらよいかという議論に進むことにする。この \hat{x} を得るもっと簡単な方法として、誰しも(1)式と(4)式の重みつき平均値を考えるであろう。すなわち

$$\hat{x} = k_1 z_1 + k_2 z_2 \quad (7)$$

ここで、 k_1 と k_2 は重み係数でこれらを決定してやる必要がある。

次に、流量の“真値” x とその推定値 \hat{x} の誤差 \bar{x} を考えると、

$$\bar{x} = \hat{x} - x \quad (8)$$

\bar{x} が不偏推定値であるためには、 \bar{x} の平均値がゼロでなければならない。すなわち、次式が成立しなければならない。

$$E(\bar{x}) = 0 \quad (9)$$

(9)式に(7), (8)式を代入すると、

$$E(\bar{x}) = E[(k_1 z_1 + k_2 z_2) - x] = 0 \quad (10)$$

さらに、(1)式の z_1 と(4)式の z_2 を(10)式に代入すると

$$E(\bar{x}) = E\{k_1(x + v_1) + k_2(x + v_2) - x\} \quad (11)$$

$$= E\{(k_1 + k_2 - 1)x + k_1 v_1 + k_2 v_2\}$$

$$= (k_1 + k_2 - 1)E(x) + k_1 E(v_1) + k_2 E(v_2) = 0 \quad (12)$$

(12)式の右辺における各項の性質をよく考えてみよう。 x は流量の“真値”で、ただ1つしか存在しないので確定値であり、 $E(x) = x$ である。また、(2), (5)式から、 $E(v_1) = E(v_2) = 0$ となる。したがって、(12)式が必ずゼロになるためには、次式が成立しなければならないことがわかる。

$$k_1 + k_2 - 1 = 0 \quad \text{あるいは、} \quad k_2 = 1 - k_1 \quad (13)$$

(13)式の関係式から、誤差項 \bar{x} は次式で与えられることがわかる。

$$\bar{x} = k_1 v_1 + (1 - k_1) v_2 \quad (13)$$

次に、 \bar{x} の分散を計算してみよう。

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= E[(\bar{x})^2] = E\{[k_1 v_1 + (1 - k_1) v_2]^2\} \\ &= E\{k_1^2 v_1^2 + 2k_1(1 - k_1)v_1 v_2 + (1 - k_1)^2 v_2^2\} \\ &= k_1^2 E(v_1^2) + 2k_1(1 - k_1)E(v_1 v_2) + (1 - k_1)^2 E(v_2^2) \end{aligned} \quad (15)$$

(15)式の右辺において、(3), (6)式から $E(v_1^2) = \sigma_1^2$ と $E(v_2^2) = \sigma_2^2$ が成立する。 $E(v_1 v_2)$ は(1)式のモデル化による誤差 v_1 と(4)式の観測誤差 v_2 の共分散である。 v_1 と v_2 が互いに独立であると仮定すれば $E(v_1 v_2) = 0$ となる。この独立な条件を考慮すると、(15)式は次のようになる。

$$\sigma^2 = E[(\bar{x})^2] = k_1^2 \sigma_1^2 + (1 - k_1)^2 \sigma_2^2 \quad (16)$$

(8)式にもどって、 \bar{x} は流量の“真値” x とその推定値 \hat{x} の差になっており、(16)式の σ^2 は推定

値の誤差分散を意味する。誤差分散は \hat{x} の推定精度に関連する。すなわち、われわれの関心事は流量の推定値 \hat{x} の精度をあげることにある。したがって、精度向上には(16)式の分散をできるだけ小さくしてやればよい。先に、(7)式の重み係数 k_1 と k_2 ((13)式より $k_2=1-k_1$ が成立する)を決定しなければならないと述べた。この k_1 の決定に、(16)式の分散を最小にすることを考えればよいことになる。

すなわち、次式が成立しなければならない。

$$\frac{\partial \sigma^2}{\partial k_1} = 2k_1\sigma_1^2 - 2(1-k_1)\sigma_2^2 = 0 \quad (17)$$

(17)式を k_1 について解くと、

$$k_1 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}} \quad (18)$$

(18)式を(13)式に代入して k_2 を求めると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} k_2 &= 1 - k_1 \\ &= \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}} \end{aligned} \quad (19)$$

(18)式を(16)式に代入して、流量推定値 \hat{x} の誤差分散を計算すると次式が得られる。

$$\sigma^2 = E[(\hat{x})^2] = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}} \quad (20)$$

(20)式は非常に重要な性質をもっている。それらを要約して、以下に示す。

(a) σ^2 は流量推定値 \hat{x} の精度(分散)である。したがって、 \hat{x} が計算されたとしても、 σ^2 があまりに大きすぎると、推定値 \hat{x} の信頼度は非常に低いことになる。実際問題を想定すれば、推定値 \hat{x} は信頼おけない値になるということになる。

(b) 流量推定精度 σ^2 は、モデル誤差分散 σ_1^2 と観測誤差分散 σ_2^2 の大きさに依存する。 σ_1^2 と σ_2^2 がともに大きくなると σ^2 も大きくなる。すなわち、流量推定精度は低下してくる。反対にモデル誤差と観測誤差がともに小さい(σ_1^2 と σ_2^2 が小さい)ときには σ^2 も小さくなり、推定精度があがる。

(c) (b)の事実を念頭におくと、流量予測計算にあたっては、モデル誤差が小さくなるような流出モデルを選ばなければならない。また、観測誤差を小さくするためには、洪水時の流量観測をできるだけ多く行って、水位～流量曲線の精度向上に努力する必要がある。

(13)式から得られる $k_1=1-k_2$ を(7)式に代入すると、流量推定値 \hat{x} は次のようにも書換えることができる。

$$\begin{aligned}\hat{x} &= (1 - k_2)z_1 + k_2z_2 \\ &= z_1 + k_2(z_2 - z_1)\end{aligned}\tag{21}$$

(21)式もカルマン・フィルタを理解するうえで重要な式である。その特徴を以下に列挙してみる。

(a)(21)式の右辺第1項の z_1 はなにを意味しているかを考えてみよう。(1)式にもどって、 z_1 はなんらかの流出モデルを用いたときの流量推定値である。したがって、降雨量がわかれば（あるいは降雨予測値でもよい）、流出計算によって推定できる量である。

(b)次に(21)式の右辺第2項の $(z_2 - z_1)$ はなにを意味しているかを考えよう。(4)に示されるように、 z_2 は流量観測値（もちろん、水位～流量曲線から補完して得られるが）であり、 z_1 は流出モデルによる推定値である。したがって、 $(z_2 - z_1)$ は観測値と推定値（予測値）との誤差であり、 k_2 は $(z_2 - z_1)$ の誤差に応じた重みづけ係数であると判断できよう。

(c)実際に流量予測をしなければならない人の立場で、(21)式の意味を考えると興味深い。 z_1 と z_2 の差が小さければ実務者は流出モデル計算による z_1 を信用して、その値を流量予測値 \hat{x} とみなすであろう。反対に、 z_1 と z_2 の差が大きければ、実務者は $(z_2 - z_1)$ の大きさに応じて重みづけを行い、 z_1 を補正して流量予測値 \hat{x} を算定しようとする意識が働くはずである。したがって、(21)式は人間の直感に近いことができる構造式となっている。先に、カルマン・フィルタ理論が人間の経験的直感による予測に近いことを計算機で自動的に行えると述べたのは(21)式の性質による。

(21)式の重み係数 k_2 はカルマン・フィルタ理論では重要な要素であり、しばしばカルマン利得（カルマン・ゲイン）と呼ばれている。それでは、このカルマン・ゲイン k_2 がどのような性質をもっているかを(19)式から調べてみることにする。

(a) σ_z^2/σ_f^2 が大きくなる（すなわち、観測誤差が大きく、モデル誤差が小さい）とき、 k_2 は小さくなる。したがって(21)式の右辺第2項の $k_2(z_2 - z_1)$ の影響は非常に小さくなり、流量予測値 \hat{x} はほとんど第1項のモデルによる推定値 z_1 で決まってしまうことになる。

(b) σ_z^2/σ_f^2 が小さくなる（すなわち、観測誤差が小さくて、モデル誤差が大きい）とき、 k_2 は大きくなる。したがって、(21)式の右辺第2項の $k_2(z_2 - z_1)$ は第1項の z_1 と同じくらい重要な影響をもつことになり、流量予測値 \hat{x} に及ぼす補正効果が大きくなる。

以上、カルマン・ゲインの性質は人間が経験的直感に頼って予測値を補正する方法によく一致していることがわかっていただけたと思う。とくに、構成式としてのシステム方程式と観測方程式の定式化、およびカルマン・ゲインの特性を理解することが重要である。

4. カルマン・フィルタの実運用上の課題

最近では、電子計算機や通信機能の目覚ましい発達により、水文情報が実時間で入手できるようになった。このためカルマン・フィルタを用いた流出予測モデルは、現場においてシス

テム化され、実際に洪水予測に利用されている。北海道開発局においても、石狩川をはじめ十勝川、留萌川等多くの河川でカルマン・フィルターを用いた流出予測モデルがシステム化されている。今後の洪水予測システムの大きな課題は河川情報システム、レーダ雨雪量計システムという水文情報収集システムと流出予測システムをいかに効率的に結びつけるか、また、予測値をどのように表示し、水防活動に結びつけていくかという実務的なものにその力点が移っていくと考えられる。すなわち現在までにカルマン・フィルターを用いた流出予測モデルの方法論については、ほぼ確立されたと言うことができよう。しかしカルマン・フィルターを用いた流出予測モデルを適用する際の残された課題の一つに、誤差項（ノイズ項）の具体的設定方法がある。一般にカルマン・フィルターの適用にあたっては、システムノイズと観測ノイズを与える必要がある。このノイズ項の与え方には、未だ定まった方法論は無く、多分に経験的、恣意的に設定されてきたきらいがある。よって、カルマン・フィルターを用いた流出予測モデルの適用性の向上を図るためには合理的な誤差項の設定方法を、今後確立していく必要がある。本報告はカルマン・フィルターを用いた流出予測モデルの適用性の向上を意図して、水位～流量（ $H \sim Q$ ）変換に伴う誤差、予測降雨の誤差の評価方法及びそれら誤差の流出予測モデルにおける取り扱い法を提案するものである。

5. 流出予測モデルにおける誤差

流出予測値に誤差を生じさせる要因としては、①流出モデルの有する誤差、②観測値の有する誤差、③予測降雨の有する誤差が挙げられる。筆者の提案している流出予測モデル⁶⁾では、①～③の誤差をこれまで次のように取り扱ってきた。まず流出モデルの持つ誤差については、これを流出モデル自体の誤差とパラメータの同定誤差に分離し、流出モデル自体の誤差は乗算的ノイズ、すなわち状態量の $\alpha\%$ と表現している。一方パラメータの誤差は形式的にシステム方程式を拡大し、パラメータを状態変量に取り込むことにより流出予測値にその誤差を反映させている（シュミット・カルマンの方法）。また実時間で得られる観測値としては流量 Q を考え、観測誤差もシステムノイズ同様、乗算的ノイズとしている。予測雨量の誤差については考慮していない。

流量 Q は通常、観測水位から $H \sim Q$ 式を用いて変換される。従って流量 Q の誤差は観測水位 H そのものの誤差と $H \sim Q$ 変換の際に生ずる誤差が考えられる。水位観測機器の十分な維持管理さえ行われれば、観測水位そのものの誤差は小さく、流量 Q の誤差の大部分は、 $H \sim Q$ 曲線のあてはめ誤差で構成されると考えて差し支えがないであろう。よって、 $H \sim Q$ 曲線のあてはめ誤差を評価することができれば、合理的に観測誤差を設定できそうである。また、現在の降雨予測の技術水準では、予測雨量の誤差はかなり大きく、流出予測値の誤差のかなりの部分を構成していると考えられる。またこの誤差は、予測時間が長くなるほど、対象流域が小さくなるほど、大きくなるものである。

6. 水位～流量 (H～Q) 関係の誤差

通常、H～Q関係は $H \sim \sqrt{Q}$ 関係が直線関係にあるとして、 $H \sim \sqrt{Q}$ 関係を観測データから最小2乗法で求めている。回帰式は次式のようになる。

$$\sqrt{Q} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 H \quad (22)$$

ここで、 \hat{a}_0 、 \hat{a}_1 は回帰係数の推定値で、以後は推定量を表すものとする。

回帰式から求める \sqrt{Q} の分散推定値は、以下のようになる⁷⁾。

$$\begin{aligned} V(\sqrt{Q}) &= \left(\frac{\partial(\sqrt{Q})}{\partial \hat{a}_0}\right)^2 V(\hat{a}_0) + \left(\frac{\partial(\sqrt{Q})}{\partial \hat{a}_1}\right)^2 V(\hat{a}_1) + 2\left(\frac{\partial(\sqrt{Q})}{\partial \hat{a}_0}\right)\left(\frac{\partial(\sqrt{Q})}{\partial \hat{a}_1}\right) \text{Cov}(\hat{a}_0, \hat{a}_1) \\ &= V(\hat{a}_0) + H^2 V(\hat{a}_1) + 2H \text{Cov}(\hat{a}_0, \hat{a}_1) \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 $V(x)$ は x の分散の推定値、 $\text{Cov}(x, y)$ は x と y の共分散の推定値を表すものである。

\hat{a}_0 、 \hat{a}_1 の分散、共分散は次式で計算できる。

$$V(\hat{a}_0) = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{\bar{H}^2}{\sum_{i=1}^n (H_i - \bar{H})^2} \right\} \hat{\sigma}^2 \quad (24)$$

$$V(\hat{a}_1) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (H_i - \bar{H})^2} \hat{\sigma}^2 \quad (25)$$

$$\text{Cov}(\hat{a}_0, \hat{a}_1) = -\frac{\bar{H}}{\sum_{i=1}^n (H_i - \bar{H})^2} \hat{\sigma}^2 \quad (26)$$

ここで \bar{H} は水位データの平均値で $\bar{H} = \Sigma H_i / n$ である。

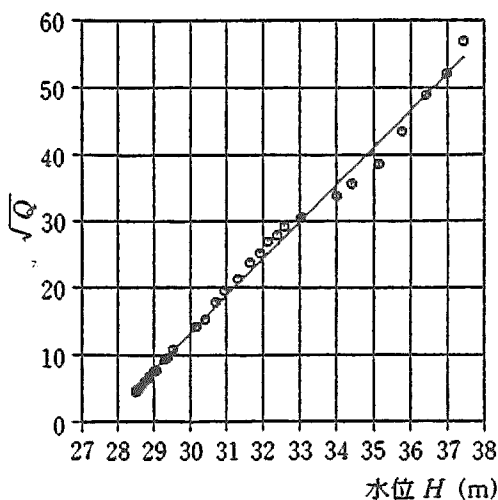


図-2 雨竜橋地点のH～Q関係図
(昭和63年)

表-1 水位～流量曲線定数解析結果
(昭和63年)

サンプル数	31
a_0	-152.93
a_1	5.54
$V(a_0)$	6.41
$V(a_1)$	0.006
$\text{Cov}(a_0, a_1)$	-0.202
b_0	27.60
b_1	0.180
$V(b_0)$	0.00461
$V(b_1)$	0.000007
$\text{Cov}(b_0, b_1)$	-0.000144
適用範囲	$27.73 \leq H \leq 37.63$

$\hat{\sigma}^2$ は流量データの分散の不偏推定値を表しており

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (\sqrt{Q_i} - \hat{a}_0 - \hat{a}_1 H_i)^2 \quad (27)$$

となる。

以上のように(24)~(26)式により回帰係数の a_0 , a_1 の分散, 共分散を, また(23)式により \sqrt{Q} の分散を求めることが可能となる。

後述するように, 本研究で用いた流出予測モデルでは, 観測方程式を次の形で与える。

$$H = b_0 + b_1 \sqrt{Q} \quad (28)$$

よって $b_0 = -a_0/a_1$, $b_1 = 1/a_1$ となる。新しい回帰係数 b_0 , b_1 の分散, 共分散は次式で与えられる。

$$\text{Var}(b_0) = \left(-\frac{1}{a_1}\right)^2 \text{Var}(a_0) + \left(\frac{a_0}{a_1^2}\right)^2 \text{Var}(a_1) + 2\left(-\frac{1}{a_1}\right)\left(\frac{a_0}{a_1^2}\right) \text{Cov}(a_0, a_1) \quad (29)$$

$$\text{Var}(b_1) = \left(-\frac{1}{a_1^2}\right)^2 \text{Var}(a_1) \quad (30)$$

$$\text{Cov}(b_0, b_1) = \left(\frac{a_0}{a_1^2}\right)\left(-\frac{1}{a_1^2}\right) \text{Var}(a_1) + \left(-\frac{1}{a_1}\right)\left(-\frac{1}{a_1^2}\right) \text{Cov}(a_0, a_1) \quad (31)$$

図-2 は石狩川水系雨竜川の雨竜橋地点における昭和63年度の観測データに基づく $H \sim \sqrt{Q}$ 関係を表したものである。また表-1 はこれらのデータに, (23)~(27)式, (29)~(31)式を適用して回帰係数の分散, 共分散を求めた結果である。

7. 予測降雨の誤差のモデル化

レーダ雨量計を用いた降雨予測手法は数多く提案されているが, その予測精度が定量的に評価されている例は意外に少ない。吉野ら⁸⁾は予測雨量と実測雨量の関係を統計的に処理し予測雨量の信頼限界を明らかにしている。また高棹ら⁹⁾はこれを一歩進め予測値の期待値が真値と一致し, その分散が予測時間 l と真値の 2 乗に比例すると考えて, 次のように予測値の期待値, 分散をモデル化した。

$$E[\hat{r}_{k+l}] = r_{k+l} \quad (32)$$

$$V[\hat{r}_{k+l}] = S_{k+l}^2 = a_p^2 \cdot l \cdot r_{k+l}^2 \quad (33)$$

ここに $E[\cdot]$: 期待値, $V[\cdot]$: 分散, \hat{r} : 予測雨量, r : 真値(実測雨量), S : 標準偏差, a_p : パラメータ, l : 予測時間(リードタイム), k : 予測時刻

(32), (33)式は, 予測時間が長くなるほど, また, 降雨強度が大きくなるほど予測精度が悪くなるという仮定に基づいている。ただし, 高棹らの原論文では, (32), (33)式は予測降雨の精度を表すために導入されたものではなく, 逆に, 実測雨量から予測雨量を, 指定された精度で擬似的に作り出すためにモデル化されたものである。本研究でもこの誤差モデルの形式をそのまま採

用することにし、降雨予測結果を統計処理し a_p を決定する。降雨予測は石狩川流域を対象に移流モデル¹⁰⁾を用いて行った。S.63.8.25, S.63.8.28, H.1.9.3の3降雨を対象に、道央レーダ雨雪量計のレーダ雨量を用いて3時間先までの降雨予測を行った。予測雨量を実測雨量と対比しその誤差を統計的に処理することにより $a_p=0.37$ を得た。図-3は予測雨量と実測雨量の散布図及び(33)式で表される標準偏差を示したものである。

8. 流出予測モデル

流出予測モデルは、次式で示される貯留関数型のモデルを採用する。このモデルは等価粗度モデルの理論解から導出されたものであり、数値的な取り扱いが簡単なうえ適用性も優れている。¹¹⁾

$$s = k_1 q^{p_1} + k_2 \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \quad (34) \quad \frac{ds}{dt} = fr - q \quad (35)$$

ここに、 s : 貯留高、 q : 流出高、 r : 降雨量、 f : 流出率

マニング則による表面流を想定する場合、(34)式のモデル定数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} k_1 &= 2.823 f_c A^{0.24} & k_2 &= 0.2835 k_1^2 \bar{r}_e^{-0.2648} \\ p_1 &= 0.6 & p_2 &= 0.4648 & f_c &= (n/\sqrt{i})^{0.5} \end{aligned} \quad (36)$$

ここに、 A : 流域面積、 n : 等価粗度、 i : 勾配、 \bar{r}_e : 平均有効雨量強度

(34), (35)式を線形化するため、次式のように変数変換する。

$$x_1 = q^{p_2}, \quad x_2 = \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \quad (37)$$

(37)式を(34), (35)式に代入し、これをテイラー展開によって線形化し、かつ差分化すると次式が得られる。

$$X_{k-1} = \Phi_k X_k + \Gamma_k B_k \quad (38)$$

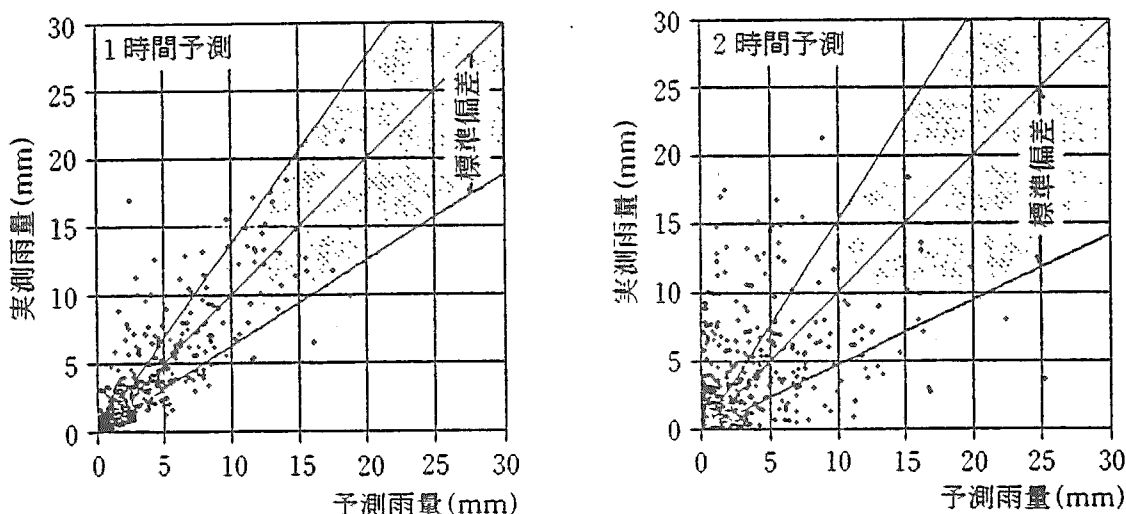


図-3 予測降雨の誤差のモデル化

ただし, $X_k^T = [x_1, x_2]_k$ である。

(38)式を用いることにより, $k+1$ 時刻の状態量 X_{k+1} を数値的に求めることができ, かつカルマン・フィルター理論を適用し, 状態量の更新及び状態量の有する誤差を計算することができる。ただし(38)式ではモデル定数, $H \sim Q$ 変換定数及び予測降雨の誤差を状態量の誤差に反映させることはできない。よって形式上, モデル定数, $H \sim Q$ 変換定数, 予測降雨を状態量に加え, システム方程式を拡大する。すなわち,

$$X^T = [x_1, x_2, k_1, k_2, d_1, d_2, f, b_0, b_1, r] \quad (39)$$

とする。ただし r は予測雨量である。システム方程式に取り組み予測雨量は, その時点で計算に用いる予測雨量だけとする。このように状態量を拡大すると(38)式は次のように書き換えられる。

$$X_{k+1} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}_{k+1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & 0 & \Phi_4 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (d_2)_k \quad (40)$$

ただし $X_1^T = [x_1, x_2]$, $X_2^T = [k_1, k_2, d_1, d_2, f]$, $X_3^T = [b_0, b_1]$, $X_4 = r$ である。

この時, 状態量の誤差分散, 共分散は次式で表される。

$$P_k = E \left[\begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \bar{X}_3 \\ \bar{X}_4 \end{bmatrix} (\bar{X}_1 \ \bar{X}_2 \ \bar{X}_3 \ \bar{X}_4)_k \right] = \begin{bmatrix} P_{1,k} & P_{2,k} & P_{3,k} & P_{4,k} \\ P_{2,k}^T & U_k & 0 & 0 \\ P_{3,k}^T & 0 & W_k & 0 \\ P_{4,k}^T & 0 & 0 & V_k \end{bmatrix} \quad (41)$$

すなわち, $E(\bar{X}_2 \bar{X}_3^T) = 0$, $E(\bar{X}_2 \bar{X}_4^T) = 0$, $E(\bar{X}_3 \bar{X}_4^T) = 0$ である。

(41)式において U_k はモデルパラメータの誤差分散・共分散である。 W_k は $H \sim Q$ 変換定数の誤差分散・共分散であり, (29)~(31)式で計算される。また V_k は予測降雨の分散で(33)式で与えられる。

9. 実河川への適用

石狩川の一次右支川雨竜川を対象に, 前節で述べた流出予測モデルを適用し, その適用性を検証した。雨竜川は本線105km地点で合流する流域面積1722.3km², 幹線流路延長177.0kmの河川である。シミュレーションを行ったのはS63.8.25洪水である。この洪水は, 雨竜橋(流域面積1,660.7km²)で計画高水位を上回った大出水であった。図-4は実測値と予測値を比較したものである。1時間予測とは, 1時間後の予測値を包絡したハイドログラフである。図-4から1時間予測では, 十分な精度で流出予測が行われていることがわかる。1時間予測の場合のピーク付近の標準偏差は約1m程度である。1時間予測の際の予測降雨誤差は小さいので, この誤差の大部分はシステムノイズで構成されている。3時間予測ではピーク付近の予測精度は良好であるが, ピーク前の急激な上昇は表現し得ていない。これは予測降雨が小さかったためである。今後, 更に検討を進めていく必要があるが, システムノイズは若干小さく, また予測降雨のノイズは更に大きく設定する方が妥当と推定される。

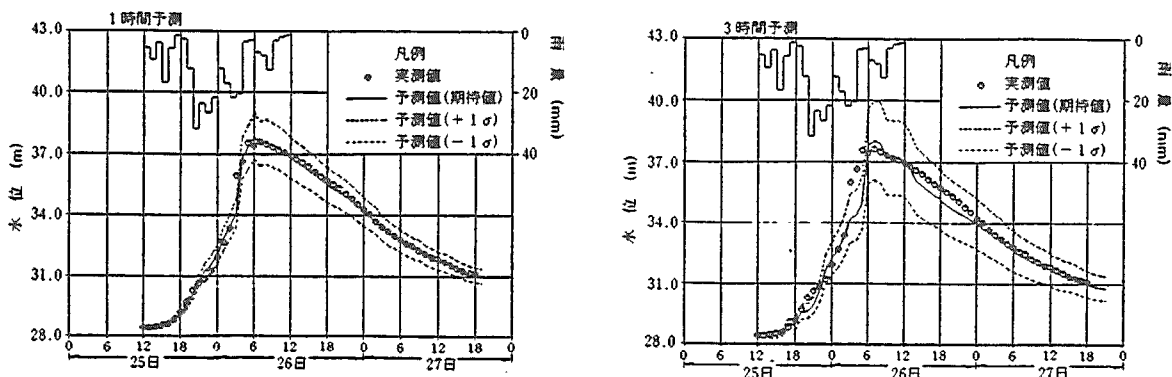


図-4 実測値と予測値の比較ハイドログラフ

参考文献

- 1) Kalman, R. E.: *A new approach to linear filtering and prediction problems*, *J. of Basic Engineering, ASME, Vol.82D, 1960.*
- 2) Hino, M: *On-line prediction of hydrologic system*, *Proc. of the 15th Conference of the IAHR, Istanbul, Vol.4, 1973.*
- 3) 日野 幹雄：水文流出系予測へのカルマン・フィルター理論の適用，土木学会論文報告集，第221号，1974.
- 4) Chiu, C.L.: *Applications of Kalman Filter to Hydrology, Hydraulics, and Water Resources*, *Proc. of the AGU Chapman Conference, University of Pittsburgh, 1978.*
- 5) 椎葉 充晴：レーダ雨量計を利用した降雨の実時間予測と実時間流出予測法，第23回水工学に関する夏期研修会講義集，Aコース，土木学会，1987.
- 6) 星清：洪水予測法の実例，第24回水工学に関する夏期研修会講義集，土木学会，pp.A-3-1~20，1988.
- 7) 中津川誠，星清：水位—流量関係から推定される流量の精度について（その1），北海道開発局開発土木研究所月報，No443，pp.2~8,1990.
- 8) 吉野文雄・水野雅光・兪朝夫：雨域追跡法による短時間降雨予測の精度，第31回水理講演会論文集，pp.209~214,1987.
- 9) 高棹琢馬・椎葉充晴・宝馨：洪水流出の確率予測におけるモデルと手法，第19回自然災害科学総合シンポジウム，pp.63~66,1982.
- 10) 椎葉充晴・高棹琢馬・中北英一：移流モデルによる短時間降雨予測手法の検討，第28回水理講演会論文集，pp.423~428,1984.
- 11) 星清・山岡勲：雨水流法と貯留関数法との相互関係，第26回水理講演会論文集，pp.273~278,1982.