

## 2 段タンク型貯留関数モデルの同定手法の改良

### Improvement of Identification Method of Two-Cascade Storage Routing Model

園山 裕士\* 星 清\*\*

Hiroshi SONOYAMA and Kiyoshi HOSHI

一般化貯留関数モデルは、降雨流出現象の非線形性を表現できることから、洪水の評価に用いられてきた。また、ニュートン法による最適化アルゴリズムはモデルパラメータを容易に決定することができた。しかしながら、有効降雨の決定が人為的判断に従うことから、いくつかの事例においてパラメータの普遍的な値を決定することが困難であるという問題があった。

この論文は、観測降雨および流量を使用して、地下水流出および表面・中間流出とも再現することができる2段タンク型貯留関数モデルを提案する。初めは、全流出を数学的なフィルター分離法を用いて表面・中間流出と地下水流出成分とに分離し、次の段階では、表面・中間流出成分の3つのパラメータを最適化により決定する。このとき提案するモデルは、地下水流出成分のパラメータについては最適化を必要とせず、計算上の負担を著しく減らすことができる。提案した解析手法が洪水ハイドログラフの再現を改善することができることを適用例により示す。

《キーワード：2段タンク型貯留関数モデル；流出成分；フィルター分離；流出解析；  
ニュートン法》

The generalized storage routing model has been practically applied to estimations of the design flood magnitude in which the nonlinear relationship between rainfall and runoff is maintained and model parameters can easily be identified by the Newton-Raphson optimization algorithm. However, it is difficult to identify the universal values of parameters in some cases where the determination of effective rainfall is subject to personal judgments.

This paper proposes the two-cascade storage routing model in which the surface-subsurface runoff as well as groundwater runoff can be well reproduced from the viewpoint of water balance, using the observed hyetograph and hydrograph. In the first stage, the runoff components can be separated into the surface-subsurface and groundwater flow processes via use of the numerical filter method. In the second stage, the three parameters of surface-subsurface runoff component can be optimized. No optimization is required in the parameter identification for groundwater flow process and hence computational burdens can remarkably be reduced. It is shown in application examples that the proposed approach can significantly improve the reproduction of flood hydrographs.

《Keywords: *Two-cascade storage routing model, Runoff component, Filter separation, Flood runoff analysis, Newton-Raphson method*

## 1. はじめに

現在、新しい河川法に基づく河川整備計画の策定が全国的規模で推進されており、とくに基本高水の再検討が主要課題となっている。基本高水の再検討にあっても、いわゆる「木村の貯留関数法」が主流を占めているが、モデル定数の同定が試行錯誤的に行われているため、一洪水に適合が良かったモデル定数が、他の洪水では適応性がよくないという例がしばしば発生する。この問題はいわゆる「モデル定数の総合化」にも関連し、計画降雨規模に対する基本高水ハイドログラフを決定する場合、どのようなモデル定数を用いるべきかという不安がつきまとう。

そういった問題に対し、長期浸透・蒸発散等の短期間の流出に含まれない降雨成分を損失とし考慮する機構を取り入れ、主観的な事前作業である有効雨量の算出を必要としない客観性に優れたモデル（損失項付き1段タンク型貯留関数モデル）が提案されている<sup>1)</sup>。また、このモデルを用いることにより、モデル定数の総合化が試みられている<sup>1)</sup>。

しかし、1段タンク型貯留関数モデルを用いて多くの解析を行った結果、再現が不十分である事例がいくつか見られた。その再現の特徴としては、以下の点が挙げられる。

- ・ピーク流量が低く再現される
- ・減衰部の再現形状が観測値と合わない

このことから1段タンク型モデルにおいては浸透により遅れる流出成分の再現が不十分であることが推定される。

よって本報告では、流出成分を表面・中間流出成分と地下水流出成分とに分けて考慮することとし、1段タンク型モデルについては比較的早い流出成分である表面・中間流出成分のみを表現し、浸透により遅く流出する地下水流出成分については別のタンクを設けて表現する2段タンク型貯留関数モデルを提案する。このモデルは、流出成分の分離に数学的なフィルター分離法<sup>2)</sup>を用いることで解析時の客観性を維持し、また地下水流出成分の未知定数を最適化手法を用いることなく決定し解析にかかる負担を増やさない、といった特徴を持っている。

## 2. 1段タンク型貯留関数モデル

損失項を取り入れた貯留関数モデルとして、図-1に

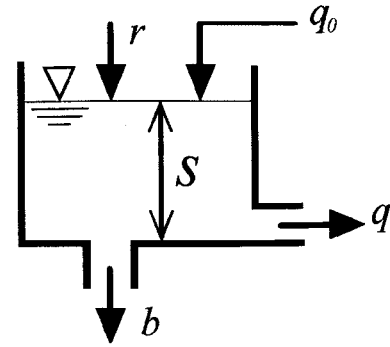


図-1 1段タンク型貯留関数モデル

示す1段タンク型貯留関数モデルを考え、次式の貯留関数法を採用する。

$$\begin{cases} s = k_{11}q^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \\ \frac{ds}{dt} = r - q - b + q_0 \\ b = k_{13}q \\ q_0 = q_B \exp(-\lambda t) \end{cases} \quad (1)$$

ここに、 $s$ ：貯留高(mm)、 $r$ ：観測雨量(mm/h)、 $q$ ：観測流出高(mm/h)、 $b$ ：損失高(mm/h)、 $q_0$ ：基底流出高(mm/h)、 $q_B$ ：初期流出高(mm/h)、 $k_{11}$ 、 $k_{12}$ ：貯留係数、 $k_{13}$ ：損失係数、 $p_1$ 、 $p_2$ ：貯留指数、 $\lambda$ ：減水係数  
式(1)の貯留関数法の特徴を以下にまとめる。

(a)式(1)に含まれる貯留方程式は Kinematic wave 法を貯留関数法に理論的に集中化したモデルを基本としている<sup>1)</sup>。

(b)降雨流出過程における不確定な要素(蒸発散・長期浸透・初期損失など)のすべてを損失項  $b$  でパラメタライズする。

(c)流域内の初期貯留量を考慮するため、基底流出高  $q_0$  を導入している。基底流出高  $q_0$  の導入は、解析期間内の総流出量  $\Sigma q$  が総降雨量  $\Sigma r$  を上回る際に計算不可能となることへの対応策であり、強制入力として与えることによって連続性が保たれている。なお、 $\lambda$  はハイドログラフ減水部の標準通減曲線から得られる流域に固有な値であるが、北海道内の河川における佐藤ら<sup>3)</sup>の解析結果を基に、本報告では、 $\lambda = 0.019$  に固定した。

(d)モデル定数  $p_1$  と  $p_2$  に関しては、表面流が卓越する比較的大きな出水を解析対象とする場合、マンニング則に従うと仮定し、以下の値に固定した。

$$\begin{cases} p_1 = 0.6 \\ p_2 = 0.4648 \end{cases} \quad (2)$$

(e) モデル定数  $k_{11}$  と  $k_{12}$  については、既往研究成果から次の関数形を仮定する。

$$\begin{cases} k_{11} = c_{11} A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12} k_{11} (\bar{r})^{-0.2648} \end{cases} \quad (3)$$

ここに、 $A$  : 流域面積 ( $\text{km}^2$ )、 $\bar{r}$  : 平均雨量強度 ( $\text{mm/h}$ )、 $c_{11}$ 、 $c_{12}$  : 未知定数

(3) 式よりモデル定数  $k_{11}$  は流域特性値に、 $k_{12}$  は流域・降雨特性値の双方に依存して変化するので、各定数の流出に及ぼす影響を独立に評価できないことになる。一方、係数  $c_{11}$  と  $c_{12}$  は流域・降雨特性に依存しないことが望ましく、互いに無相関であれば、それぞれの効果を独立に評価する事ができる。

その結果、1段タンク型モデルにおける未知パラメータは、 $c_{11}$ 、 $c_{12}$ 、 $k_{13}$  の3個となり、その最適値を同定する。

### 3. 1段タンク型貯留関数モデルの解法

#### (線形化による非線形方程式の数値解法)

式(1)の貯留関数モデルの解法にあたって、次の変数変換を行う。

$$\begin{cases} y_1 = q^{p_2} \\ y_2 = \frac{d}{dt}(q^{p_2}) \end{cases} \quad (4)$$

式(1)と(4)より、非線形連立常微分方程式(5)を得る。

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = -\frac{k_{11} p_1}{k_{12} p_2} y_1^{p_1/p_2-1} y_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} y_1^{1/p_2} + \frac{1}{k_{12}} (r + q_0) \end{cases} \quad (5)$$

ここに、

$$c_3 = 1 + k_{13} \quad (6)$$

式(5)はさらに式(7)のようにベクトル表示できる。

$$\frac{dY}{dt} = F(Y) \quad (7)$$

ここに、

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad F(Y) = \begin{bmatrix} f_1(y_1, y_2) \\ f_2(y_1, y_2) \end{bmatrix}$$

$$f_1(y_1, y_2) = y_2 \quad (8)$$

$$f_2(y_1, y_2) = -\frac{k_{11} p_1}{k_{12} p_2} y_1^{p_1/p_2-1} y_2 - \frac{c_{13}}{k_{12}} y_1^{1/p_2} + \frac{1}{k_{12}} (r + q_0)$$

2階非線形方程式(7)を近似線形化する。1ステップ前における  $Y$  の値を  $Y^*$  ( $y_1^*$  と  $y_2^*$ ) とし、 $F(Y)$  を1次の項まで Taylor 級数展開すると、式(7)は式(13)に変換される。

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ \frac{dy_2}{dt} = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_0 + \frac{1}{k_2} (r + q_0) \end{cases} \quad (9)$$

$$a_1 = \frac{\partial f_2}{\partial y_1} = -\frac{k_{11} p_1}{k_{12} p_2} \left( \frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (y_1^*)^{p_1/p_2-2} (y_2^*) - \frac{c_{13}}{k_{12} p_2} (y_1^*)^{1/p_2-1} \quad (10)$$

$$a_2 = \frac{\partial f_2}{\partial y_2} = -\frac{k_{11} p_1}{k_{12} p_2} (y_1^*)^{p_1/p_2-1} \quad (11)$$

$$a_0 = \frac{k_{11} p_1}{k_{12} p_2} \left( \frac{p_1}{p_2} - 1 \right) (y_1^*)^{p_1/p_2-1} (y_2^*) + \frac{c_{13}}{k_{12}} \left( \frac{1}{p_2} - 1 \right) (y_1^*)^{1/p_2} \quad (12)$$

$$\frac{dY}{dt} = A_1 Y + B \quad (13)$$

ここに、

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$b_2 = a_0 + \frac{1}{k_2} (r + q_0)$$

式(13)を数値計算の便宜上、離散方程式に変換する。 $A_1(Y^*)$  と  $B(Y^*)$  が定係数行列の時、 $k$  を任意のタイム・ステップとして、式(13)は差分方程式(15)に変換できる。

$$Y_{k+1} = \Phi Y_k + \Gamma B_k \quad (15)$$

ここに、

$$Y_k = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}_k, \quad B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ b_{2,k} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

なお、 $\Phi$  および  $\Gamma$  は次の級数和で求められる。

$$\Phi = e^{AT} = I + AT + \frac{1}{2}(AT)^2 + \frac{1}{6}(AT)^3 + \dots + \frac{1}{m!}(AT)^m \quad (17)$$

$$\Gamma = (e^{AT} - I)A^{-1} = T \left( I + \frac{1}{2}AT + \frac{1}{6}(AT)^2 + \frac{1}{24}(AT)^3 + \dots + \frac{1}{m!}(AT)^{m-1} \right) \quad (18)$$

ここに、 $I$  : 単位行列、 $T$  : 計算時間間隔

$T$  および  $m$  の取り方については、文献 1) を参照されたい。通常、級数は第 5 項まで展開すれば十分なので、 $m=4$  としたときの  $\Phi$  および  $\Gamma$  の要素を求めると、次の通りである。

$$\begin{cases} \phi_{11} = 1 + \frac{1}{2}a_1T^2 + \frac{1}{6}a_1a_2T^3 + \frac{1}{24}a_1a_3T^4 \\ \phi_{12} = T \left( 1 + \frac{1}{2}a_2T + \frac{1}{6}a_3T^2 + \frac{1}{24}a_2a_4T^3 \right) \\ \phi_{21} = a_1\phi_{12} \\ \phi_{22} = 1 + a_2T + \frac{1}{2}a_3T^2 + \frac{1}{6}a_2a_4T^3 + \frac{1}{24}(a_1a_3 + a_2^2a_4)T^4 \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \gamma_{11} = T \left( 1 + \frac{1}{6}a_1T^2 + \frac{1}{24}a_1a_2T^3 \right) \\ \gamma_{12} = T^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6}a_2T + \frac{1}{24}a_3T^2 \right) \\ \gamma_{21} = a_1\gamma_{12} \\ \gamma_{22} = \phi_{12} \end{cases} \quad (20)$$

ここに、

$$a_3 = a_1 + a_2^2, \quad a_4 = a_1 + a_3 \quad (21)$$

所要流出高  $q$  は、漸化式(15)により任意のタイム・ステップ  $k$  における  $y_1$  と  $y_2$  の値が逐次計算されるので、式(4)を用いて次のように求められる。

$$q = y_1^{1/p_2} \quad (22)$$

#### 4. モデル定数の最適化手法

非線形方程式の数値解析手法に多用されている最適化手法は多岐にわたるが、もっとも単純な手法にニュートン法 (Newton-Raphson Method) があり、通常、関数の一次微係数を必要とする。したがって、ニュートン法によるモデル定数最適化同定の成否は、この一次微係数をいかに効率よく算定するかにかかってくる。

##### 4-1. 感度係数方程式 (感度係数の算定)

今、モデル定数が時間的に変化しないと仮定し、式(5)における変数  $y_1$  と  $y_2$  に関する微分方程式をモデル定数  $k_{11}$ ,  $k_{12}$ ,  $c_{13}$  で微分すると式(23)が得られる。

$$\frac{dU}{dt} = A_1U + D \quad (23)$$

ここに、

$$U = \left[ \frac{\partial y_1}{\partial k_{11}} \frac{\partial y_1}{\partial k_{12}} \frac{\partial y_1}{\partial c_{13}} \frac{\partial y_2}{\partial k_{11}} \frac{\partial y_2}{\partial k_{12}} \frac{\partial y_2}{\partial c_{13}} \right]^T \quad (24)$$

$$A_1 = \frac{\partial F}{\partial Y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$D = [0 \ 0 \ 0 \ d_1 \ d_2 \ d_3]^T \quad (26)$$

$$\begin{cases} d_1 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{11}} \\ = -\frac{1}{k_{12}} \frac{p_1}{p_2} (y_1^*)^{p_1/p_2-1} (y_2^*) \\ d_2 = \frac{\partial f_2}{\partial k_{12}} \\ = \frac{1}{k_{12}^2} \left\{ k_{11} \frac{p_1}{p_2} (y_1^*)^{p_1/p_2-1} (y_2^*) + c_{13} (y_1^*)^{1/p_2} - (r + q_0) \right\} \\ d_3 = \frac{\partial f_2}{\partial c_{13}} \\ = -\frac{1}{k_{12}} (y_1^*)^{1/p_2} \end{cases} \quad (27)$$

式(24)のベクトル  $U$  は、モデル定数 ( $k_{11}$ ,  $k_{12}$ ,  $c_{13}$ )

の変化の変数 ( $y_1, y_2$ ) の変化に及ぼす影響と解釈されるので、しばしば「感度係数」といわれ、感度係数に関する方程式(23)は「感度方程式」といわれる。

感度方程式の重要な性質として、式(13)のシステム方程式と同一形式になる。システム方程式と同様に、式(23)は式(28)の差分方程式に変換される。

$$U_{k+1} = \Phi_1 U_k + \Gamma_1 D_k \quad (28)$$

ここに、

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & 0 & 0 & \phi_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{11} & 0 & 0 & \phi_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{11} & 0 & 0 & \phi_{12} \\ \phi_{21} & 0 & 0 & \phi_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{21} & 0 & 0 & \phi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{21} & 0 & 0 & \phi_{22} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & \gamma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{11} & 0 & 0 & \gamma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{11} & 0 & 0 & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & 0 & 0 & \gamma_{22} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_{21} & 0 & 0 & \gamma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{21} & 0 & 0 & \gamma_{22} \end{bmatrix} \quad (30)$$

係数行列  $\Phi_1$  および  $\Gamma_1$  は (6×6) の正方行列であり、式(15)と同じ要素で構成されることがわかる。 $\Phi_1$  と  $\Gamma_1$  の小行列が対角行列になるのは、式(25)の行列  $A_1$  の小行列が対角行列になっていることによる。また、 $\phi_{11} \sim \phi_{12}$  及び  $\gamma_{11} \sim \gamma_{12}$  の要素は、式(19)と(20)に示される係数と同一である。したがって、感度係数方程式(28)の解法は非常に容易となる。

#### 4-2. 流出高 $q$ に関する感度係数

流出高  $q$  に関する感度係数は、式(22)を用いて次のように計算される。

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial k_{11}} = \frac{1}{p_2} y_1^{1/p_2-1} \frac{\partial y_1}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial q}{\partial k_{12}} = \frac{1}{p_2} y_1^{1/p_2-1} \frac{\partial y_1}{\partial k_{12}} \\ \frac{\partial q}{\partial c_{13}} = \frac{1}{p_2} y_1^{1/p_2-1} \frac{\partial y_1}{\partial c_{13}} \end{cases} \quad (31)$$

式(31)の右辺に示される感度係数は、式(24)のベクトル  $U$  の3要素から求められる。

さらに、 $c_{11}$  と  $c_{12}$  の最適値を求めるためには、 $c_{11}$  と

$c_{12}$  に関する感度係数が必要となるが、これらは式(3)と(31)を用いて、次式で計算される。

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial c_{11}} = \frac{\partial q}{\partial k_{11}} \frac{\partial k_{11}}{\partial c_{11}} = (A^{0.24}) \frac{\partial q}{\partial k_{11}} \\ \frac{\partial q}{\partial c_{12}} = \frac{\partial q}{\partial k_{12}} \frac{\partial k_{12}}{\partial c_{12}} = (k_{11}^2 \bar{r}^{-0.2648}) \frac{\partial q}{\partial k_{12}} \end{cases} \quad (32)$$

#### 4-3. Newton 法による最適化手法の適用

モデル定数の最適化は、観測流量  $q_i^*$  と計算流量  $q_i$  ( $c_{11}, c_{12}, c_{13}$ ) の誤差  $e_i$  ( $c_{11}, c_{12}, c_{13}$ ) ができるだけ小さくなるように定数を同定することを目的としている。よって本報告では、誤差の2乗和を最小とする目的関数 (評価関数)  $J(c_{11}, c_{12}, c_{13})$  を、カイ2乗基準を用いて次式のように表す。

$$\text{Min}_{c_{11}, c_{12}, c_{13}} J(c_{11}, c_{12}, c_{13}) = \sum_{i=1}^N e_i^2(c_{11}, c_{12}, c_{13}) \quad (33)$$

ここに、 $J(c_{11}, c_{12}, c_{13})$  : 目的関数、 $N$  : 標本数  
 $e_i(c_{11}, c_{12}, c_{13})$  : 誤差項

また、誤差項は次式で与えられる。

$$e_i(c_{11}, c_{12}, c_{13}) = \{q_i^* - q_i(c_{11}, c_{12}, c_{13})\} / \sqrt{q_i^*} \quad (34)$$

ここに、 $q_i^*$  : 観測流量、 $q_i(c_{11}, c_{12}, c_{13})$  : 計算流量  
今、新たにモデル定数ベクトル  $K$  を定義する。

$$K = [c_{11} \quad c_{12} \quad c_{13}]^T \quad (35)$$

ニュートン法による最適化では、式(33)を満足するように最適ベクトル値  $K$  を繰り返し法によって探索する。すなわち、( $m+1$ )ステップにおける  $K$  の値を  $K^{m+1}$ 、 $m$  ステップにおける値を  $K^m$  としたとき、次式が成立するとして補正ベクトル  $\Delta K$  をいかに客観的かつ迅速に算出するかが主要課題となる。

$$K^{m+1} = K^m + \Delta K \quad (36)$$

$$\Delta K = [\Delta c_{11} \quad \Delta c_{12} \quad \Delta c_{13}]^T \quad (37)$$

#### 4-4. 目的関数の評価基準と最小化条件

( $m+1$ )ステップでの誤差項 $e_i(K^{m+1})$ を、 $K^m$ のまわりで1次の項までTaylor級数展開すると次のようになる。

$$e_i(K^{m+1}) = e_i(K^m) + \frac{\partial e_i(K^m)}{\partial c_{11}}(c_{11}^{m+1} - c_{11}^m) + \frac{\partial e_i(K^m)}{\partial c_{12}}(c_{12}^{m+1} - c_{12}^m) + \frac{\partial e_i(K^m)}{\partial c_{13}}(c_{13}^{m+1} - c_{13}^m) \quad (38)$$

式(38)の誤差項に関する感度係数は、式(31)、(32)及び式(34)を用いて、次式で計算される。

$$\begin{cases} \frac{\partial e_i(K^m)}{\partial c_{11}} = -\frac{1}{\sqrt{q_i^*}} \frac{\partial q_i(K^m)}{\partial c_{11}} = -w_{i1} \\ \frac{\partial e_i(K^m)}{\partial c_{12}} = -\frac{1}{\sqrt{q_i^*}} \frac{\partial q_i(K^m)}{\partial c_{12}} = -w_{i2} \\ \frac{\partial e_i(K^m)}{\partial c_{13}} = -\frac{1}{\sqrt{q_i^*}} \frac{\partial q_i(K^m)}{\partial c_{13}} = -w_{i3} \end{cases} \quad (39)$$

式(39)の関係式を用いると、式(38)は以下のように書き換えることができる。

$$e_i(K^{m+1}) = e_i(K^m) - w_{i1}\Delta c_{11} - w_{i2}\Delta c_{12} - w_{i3}\Delta c_{13} = E - W\Delta K \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (40)$$

ここに、

$$\begin{cases} E = [e_1 \ e_2 \ \dots \ e_i \ \dots \ e_N]^T \\ W = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{i1} & w_{i2} & w_{i3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N1} & w_{N2} & w_{N3} \end{bmatrix} \\ \Delta K = \begin{bmatrix} \Delta c_{11} \\ \Delta c_{12} \\ \Delta c_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^{m+1} - c_{11}^m \\ c_{12}^{m+1} - c_{12}^m \\ c_{13}^{m+1} - c_{13}^m \end{bmatrix} \end{cases} \quad (41)$$

すなわち、 $E$ は観測流量と計算流量の差からなる( $N \times 1$ )行列、 $W$ は感度係数からなる( $N \times 3$ )行列、 $\Delta K$ はモデル定数の補正項からなる( $3 \times 1$ )行列である。

式(33)の目的関数のもとに $K^{m+1}$ の値を算出することになるが、 $K^m$ は既知であるので、目的関数の評価基準は次のように変換される。

$$\begin{cases} \text{Min}_{\Delta K} J(K) \\ = \sum \{e_i(K^m) - w_{i1}\Delta c_{11} - w_{i2}\Delta c_{12} - w_{i3}\Delta c_{13}\}^2 \\ = (E - W\Delta K)^T (E - W\Delta K) \\ = [E^T E] - 2(\Delta K)^T [W^T E] + (\Delta K)^T [W^T W] (\Delta K) \end{cases} \quad (42)$$

式(42)の最小化条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial J(K)}{\partial (\Delta K)} = -2[W^T E] + 2[W^T W]\Delta K = 0 \quad (43)$$

式(43)から補正ベクトル $\Delta K$ は次式で計算される。

$$\Delta K = [W^T W]^{-1} [W^T E] \quad (44)$$

式(44)を解くにあたり、最適値すなわち $|\Delta K|$ の値が十分に小さい値に収束するか、 $|\Delta K/K^m|$ が許容限界値(通常は0.001~0.01程度)に収束するまで繰り返される。このため、効率よく $\Delta K$ を計算する必要がある。

本報告では、 $W$ の列ベクトルを互いに直交化させるCholesky法を用いて、 $\Delta K$ を効率よく算定することができる成分回帰手法を併用した。なお、収束条件として、 $\Delta K$ の許容限界値を0.001に設定した。

## 5. 2段タンク型貯留関数モデル

損失機構を持つ1段タンク型貯留関数モデルに地下水流出成分を表現する2段目タンクを追加した2段タンク型貯留関数モデル(図-2)を導入する。1段目タンク(上段タンク)においては、流域の表面を比較的早く流出する「表面・中間流出成分」を表し、2段目タンク(下段タンク)は流域に浸透した後に流出する「地下水流出成分」を表す。流出特性の違いを考慮し、流出を2成分に分けて解析することにより、洪水再現の向上を図っている。

1段目タンクにおいては1段タンク型貯留関数モデルと同様に非線形モデルを用い、次式で表現する。

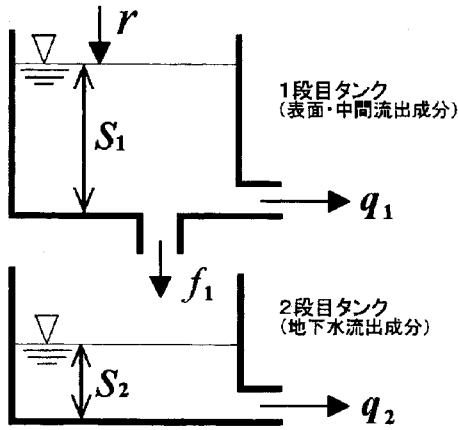


図-2 2段タンク型貯留関数モデル

$$\begin{cases} s_1 = k_{11}q_1^{p_1} + k_{12} \frac{d}{dt}(q_1^{p_2}) & (45) \\ \frac{ds_1}{dt} = r - q_1 - f_1 & (46) \\ f_1 = k_{13}q_1 = k_{13}(q - q_2) & (47) \end{cases}$$

ここに、 $s_1$  : 1 段目タンク貯留高 [mm]、 $r$  : 観測雨量 [mm/h]、 $q_1$  : 表面・中間流出高 [mm/h]、 $f_1$  : 1 段目タンクから 2 段目タンクへの浸透供給量 [mm/h]、 $k_{11}$ 、 $k_{12}$  : 貯留係数、 $k_{13}$  : 損失係数、 $p_1$ 、 $p_2$  : 貯留指数

1 段目の損失分  $f_1$  は浸透供給量として、すべて 2 段目タンクへの入力とした。また、1 段タンク型モデルと同様に以下の式を用いる。

$$\begin{cases} p_1 = 0.6 \\ p_2 = 0.4648 \\ k_{11} = c_{11}A^{0.24} \\ k_{12} = c_{12}k_{11}^2(\bar{r})^{-0.2648} \\ c_{13} = k_{13} + 1 \end{cases} \quad (48)$$

ここに、 $A$  : 流域面積 [km<sup>2</sup>]、 $\bar{r}$  : 平均雨量強度 [mm/h]、 $c_{11}$ 、 $c_{12}$  : 未知定数

上式より、表面・中間流出成分は  $c_{11}$ 、 $c_{12}$ 、 $k_{13}$  の 3 つのパラメータによって表現することができる。

2 段目のタンクについては以下の線形モデルを採用した。

$$\begin{cases} s_2 = k_{21}q_2 + k_{22} \frac{dq_2}{dt} \\ \frac{ds_2}{dt} = f_1 - q_2 \end{cases} \quad (49)$$

ここに、 $s_2$  : 2 段目タンク貯留高 [mm/h]、 $k_{21}$ 、 $k_{22}$  :

未知定数、 $q_2$  : 地下水流出高 [mm/h]

最終的に 1 段目 (表面・中間流出成分) の流出高  $q_1$  と 2 段目 (地下水流出成分) の流出高  $q_2$  を合計して全流出高  $q$  とする。

$$q = q_1 + q_2 \quad (50)$$

## 6. 流出成分の分離法

流出成分を 2 成分に分離する方法として、一般に日野・長谷部によって提案された「フィルター成分分離法」<sup>2)</sup> が用いられている。この分離法は端的に言えば、観測流量を客観的に (あるいは数学的に) 「表面・中間流出成分」と「地下水流出成分」に分離する手法である。日野・長谷部は地下水流出成分を線形方程式で表現可能であると、次式で表現した。

$$\frac{d^2q_2}{dt^2} + c_1 \frac{dq_2}{dt} + c_0q_2 = c_0q \quad (51)$$

ここに、 $c_0$ 、 $c_1$  : 未知定数、 $q_2$  : 地下水流出成分流量、 $q$  : 全流出量

$c_0$  と  $c_1$  は次式で与えられる。

$$c_0 = (\delta/T_c)^2, \quad c_1 = \delta^2/T_c \quad (52)$$

ここに、 $T_c$  : 地下水流出成分の分離時定数、 $\delta$  : 減衰係数

$T_c$  は、ハイドログラフの低減部より決定される定数である。 $\delta$  は、減衰条件から通常 2.0~2.5 の値とする。

ここで、(51) 式の線形 2 階微分方程式は (53) 式のベクトル微分方程式に変換できる。

$$\frac{dY}{dt} = AY + B \quad (53)$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c_0q \end{bmatrix} \quad (54)$$

ここに、

$$y_3 = q_2, \quad y_4 = \frac{dq_2}{dt} \quad (55)$$

式 (53) は、次の差分方程式で表せる。

$$Y_{k+1} = \Phi Y_k + \Gamma B_k \quad (56)$$

ここに、

$$Y_k = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}_k, \quad B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ c_0 q \end{bmatrix}_k \quad (57)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

係数行列  $\Phi$  および  $\Gamma$  は、1 段タンク型モデルと同様に級数和 (式(17)～(21)参照) により求められる。

タイム・ステップごとに  $y_3$  および  $y_4$  を逐次計算すると地下水流出成分  $q_2$  が以下の式より求められる。

$$q_2 = y_3 \quad (58)$$

すなわち分離時定数  $T_c$  を使い、観測全流出から地下水流出成分を分離することができる。また、全流出成分から地下水流出成分を取り除いた成分が表面・中間流出成分となる。

## 7. 2 段タンク型貯留関数モデルの解法

1 段目タンクの非線形貯留関数モデルに含まれる未知定数  $c_{11}$ 、 $c_{12}$ 、 $c_{13}$  の同定法に関しては、1 段タンク型貯留関数モデルと同じ解法により算出する。ただし、2 段タンク型貯留関数モデルにおいては  $q_0 = 0$  とした。

地下水流出成分を表す 2 段目タンクの未知定数は  $k_{21}$  と  $k_{22}$  の 2 つである。これらについてもニュートン法による最適化計算を行うことで、最適値が得られるが、パラメータが増えることは実用上問題も多い。そこで本報告では、これらの定数を最適化することなく決定する手法を提案する。

貯留関数法による地下水流出成分を表す (49) 式は、以下のように変形される。

$$\frac{ds_2}{dt} = k_{21} \frac{dq_2}{dt} + k_{22} \frac{d^2 q_2}{dt^2} = f_1 - q_2 \quad (59)$$

すなわち、

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + c'_1 \frac{dq_2}{dt} + c'_0 q_2 = c'_0 f_1 \quad (60)$$

ここに、

$$c'_1 = \frac{k_{21}}{k_{22}}, \quad c'_0 = \frac{1}{k_{22}} \quad (61)$$

フィルター成分分離法による線形方程式 (51) と貯留関数法による線形方程式 (60) は同じ表現になっており、全流出量  $q$  が浸透供給量  $f_1$  に置き換わっているだけである。

2 式の関係を調べるために、(60) 式に (47) 式を代入すると、(62) 式が得られる。

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + c'_1 \frac{dq_2}{dt} + c'_0 (1 + k_{13}) q_2 = c'_0 k_{13} q \quad (62)$$

(62) 式の定数項部分に (61) 式の関係式を代入すると、以下の式が得られる。

$$c'_0 (1 + k_{13}) = \frac{1 + k_{13}}{k_{22}}, \quad c'_0 k_{13} = \frac{k_{13}}{k_{22}} \quad (63)$$

既往洪水の解析結果によれば、 $k_{22} \gg 1$  であることから、 $1/k_{22} \approx 0$  とみなすことができる。したがって、近似的に次式が成り立つと考えられる。

$$c'_0 (1 + k_{13}) \approx c'_0 k_{13} \quad (64)$$

以上の仮定のもとに、(51) 式と (62) 式が等価であるとするとき、定数間に次の関係式が成立する。

$$\begin{cases} c'_1 = c_1 \\ c'_0 (1 + k_{13}) \approx c'_0 k_{13} = c_0 \end{cases} \quad (65)$$

(61) 式を (65) 式に代入すると、次式よりモデル定数が得られる。

$$k_{21} = c_1 k_{22}, \quad k_{22} = k_{13} / c_0 \quad (66)$$

したがって、流出成分分離に用いた (52) 式に示される定数  $c_0$  と  $c_1$  を 2 段目タンクの貯留係数  $k_{21}$  と  $k_{22}$  の決定に利用することができる。

さらに、 $k_{21}$  と  $k_{22}$  を用いた 2 段目のタンクの解法にあたっては、(49) 式に関して次の変数変換を行う。

$$y_3 = q_2, \quad y_4 = \frac{dq_2}{dt} \quad (67)$$

この時、(60) 式は以下のように表現される。

$$\frac{dY}{dt} = AY + B \quad (68)$$



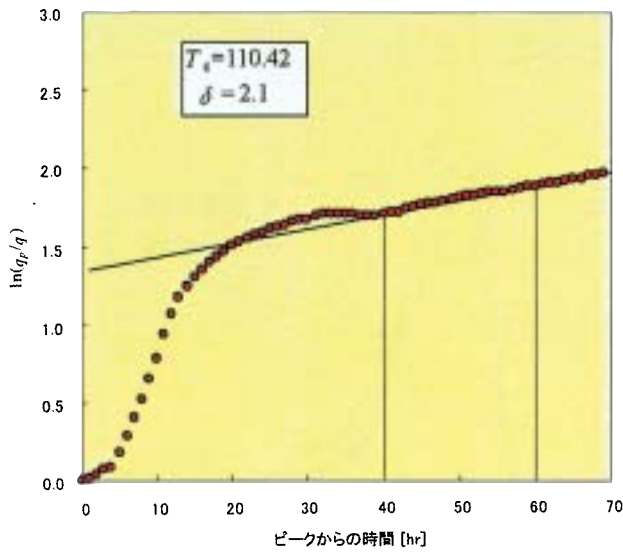


図-3 分離時定数 $T_c$ の決定

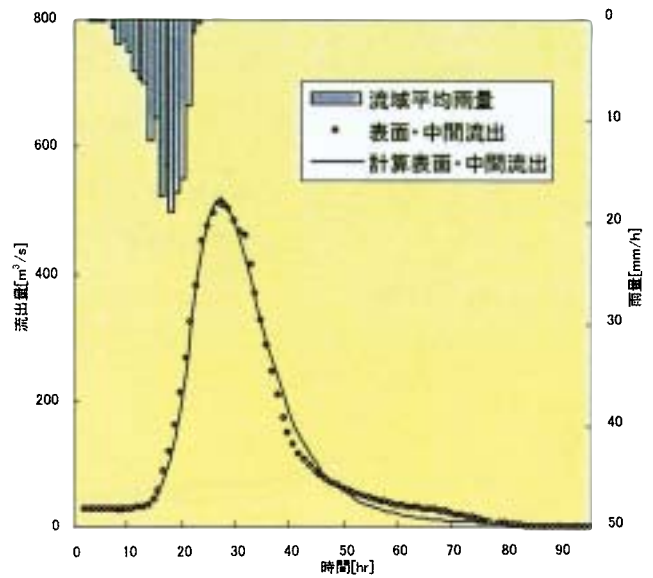


図-5 表面・中間流出再現結果

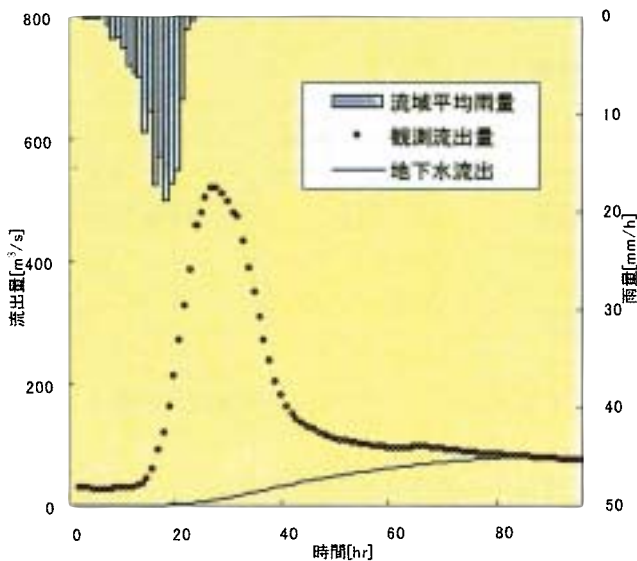


図-4 フィルター成分分離結果

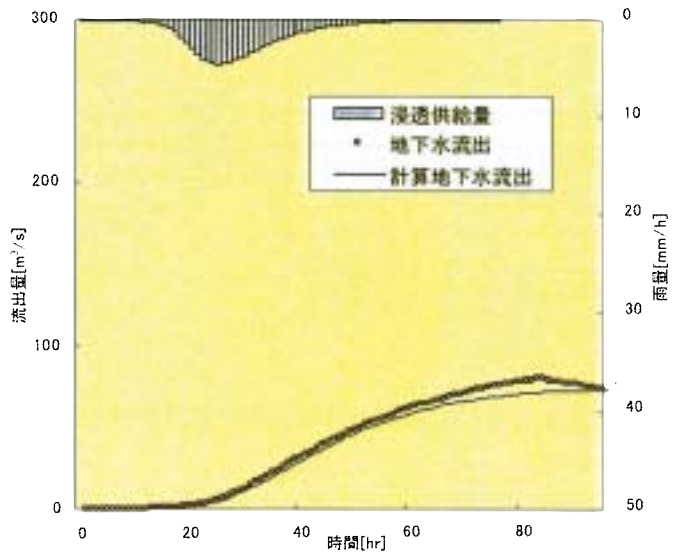


図-6 地下水流出再現結果

$$Y = \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -c'_0 & -c'_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ c'_0 f_1 \end{bmatrix} \quad (69)$$

(68)式と(53)式は構造上同一であることから、その数値解法も同一に行うことができる。

したがって、図-2に示される2段タンク型の非線形貯留関数モデルを想定する場合、未知定数 $c_{11}$ 、 $c_{12}$ 、 $c_{13}$ 、 $k_{21}$ 、 $k_{22}$ の5個のうち、最適化が必要となるのは1段タンク型貯留関数モデルと同様、 $c_{11}$ 、 $c_{12}$ 、 $c_{13}$ の3個だけである。

## 8. 既往洪水データへの適用

解析例として、標津川の洪水データ(1998年)を用い

る。標津川は、北海道東部に位置し、657km<sup>2</sup>(合流点観測所)の流域面積を有する2級河川である。地質的には泥炭地が広く分布しているため、流域は浸透性が高いことが推定される。その特徴から、雨水の多くが土中に浸透するものと考えられ、浸透成分もしくは浸透を経た後に遅れて流出する成分の評価が十分されていない1段タンク型モデルの再現は良くなかった。

この事例を用いた2段タンク型モデルによる解析過程を以下に示す。

### a) フィルター分離法による流出成分分離

日野・長谷部の方法<sup>2)</sup>に従って、全流出量を表面・中間流出成分と地下水流出成分に分離する。まず、ハイドログラフの減衰部において、ピーク流量 $q_p$ と時間流量 $q$ の比を対数プロットする(図-3)。その近似直線

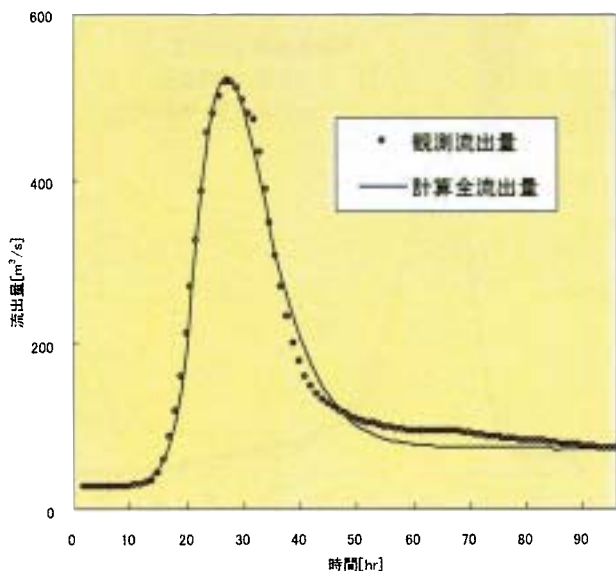


図-7 2段タンク型モデル再現結果

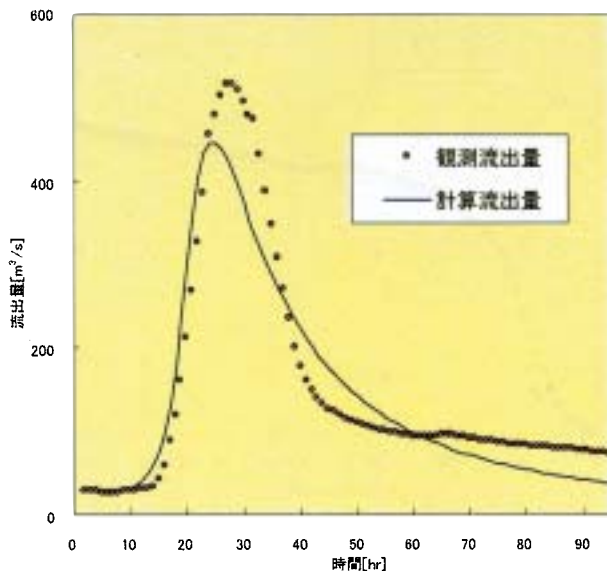


図-8 1段タンク型モデル再現結果

表-1 標津川解析結果

	$c_{11}$	$c_{12}$	$c_{13}$	$k_{21}$	$k_{22}$	$J_{PE}$	$J_{RE}$
1段タンク型モデル	16.672	0.081	1.956	—	—	0.134	0.234
2段タンク型モデル	11.411	0.251	2.763	194.65	4873.8	0.017	0.079
	比流量 [m³/s/km²]	総雨量 [mm]	観測総流出高 [mm]	計算総流出高 [mm]	観測ピーク流量 [m³/s]	計算ピーク流量 [m³/s]	総浸透供給量 [mm]
1段タンク型モデル	0.786	141.31	77.85	73.75	516.3	447.10	—
2段タンク型モデル				76.26		525.25	

の傾き  $\alpha$  を用いて以下の式により分離時定数  $T_c$  が決定される。

$$T_c = \frac{1}{\alpha} \quad (70)$$

本事例においては  $T_c = 110.42$  [hr] であった。  $\delta = 2.1$  とし(52)式より  $c_0$  と  $c_1$  を求める。成分分離には、(56)式から得られる差分方程式によって全流出量から地下水流出成分を計算する。

地下水流出が全流出量を越えるときは、地下水流出成分は全流出量に等しいとした。表面・中間流出成分は、(50)式により、全流出 ( $q$ ) から地下水流出成分 ( $q_2$ ) を引くことで求められる。本事例の分離結果を図-4 に示す。

#### b) 1段目タンクの解析

表面・中間流出成分の解析については、(45)・(46)式の非線形貯留関数モデルを用い、a)で分離した表面・中間流出成分の流量と流域平均雨量を入力し、パラメータの最適化計算を行う。得られた最適パラメータ

による表面・中間流出成分の再現結果を図-5 に示す。

#### c) 2段目タンクのパラメータの算出

地下水流出成分については、(49)式の線形貯留関数モデルにより再現を行う。b)で求めた浸透に関するパラメータ  $k_{13}$  と a)で求めた  $c_0$  と  $c_1$  を用いて、(66)式より地下水流出成分パラメータ  $k_{21}$  と  $k_{22}$  を算出する。この算出した地下水流出成分パラメータを(68)・(69)式に用いて、地下水流出成分を再現する。その際に、雨量の代わりに、1段目タンクにおける解析で得られた損失成分  $f_1$  を浸透供給量として用いる。再現結果を図-6 に示す。

#### d) 全流出量の算出

(50)式により、b)で再現した表面・中間流出成分と c)で再現した地下水流出成分を合計して全流出量とした(図-7)。また、比較対象として、1段タンク型モデルによる再現結果を図-8 に示す。また、解析結果を表-1 にまとめた。モデルの再現精度の評価には以下の式による相対誤差を求めた。

表-2 平成13年9月出水データ

石狩川水系	豊平川(雁来)、夕張川(清幌橋)、幾春別川(西川向)、空知川(赤平)、雨竜川(多度志)、石狩川(伊納・石狩大橋)、忠別川(幌橋)、美瑛川(西神楽)
天塩川水系	天塩川(名寄大橋)、名寄川(真敷別)
鶴川水系	鶴川(穂別・栄・鶴川)
沙流川水系	沙流川(平取・富川)
網走川水系	網走川(津別)
常呂川水系	常呂川(上川浴)
湧別川水系	湧別川(中湧別)
渚滑川水系	渚滑川(上渚滑)
留萌川水系	留萌川(幌糠)

$$J_{PE} = \frac{|q_p^* - q_p|}{q_p^*} \quad \text{ピーク相対誤差} \quad (71)$$

$$J_{RE} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|q_{si}^* - q_{si}|}{q_{si}^*} \quad \text{相対誤差} \quad (72)$$

ここに  $q_p^*$ : 実測ピーク流出高 [mm/h]、 $q_p$ : 計算ピーク流出高 [mm/h]、 $q_{si}^*$ : 実測流出高 [mm/h]、 $q_{si}$ : 計算流出高 [mm/h]

2段タンク型モデルによる洪水再現は1段タンク型モデルと比較して、ハイドログラフ全体にわたり良好であった。特に流出ピーク値において大きく再現が向上している。また、同じモデルを用いているにもかかわらず、表面・中間流出成分のみ再現(図-5)が全流出の再現(図-8)の結果よりも良いことから、1段目のモデルを表面・中間流出成分の再現に特化させたことが、2段タンク型モデルの再現精度の向上となったと考えられる。

e) 他ケースへの適用

北海道内の21事例(表-2)について1段タンク型モデルと2段タンク型モデルによる解析をそれぞれ行い、その再現精度を比較した。

流出ピーク値において、1段タンク型モデルによる解析結果と観測値との比較を図-9に示す。また、2段タンク型モデルによる同様の比較を図-10に示す。1段タンク型モデルによる結果は流出ピーク値を低く再現する傾向が表れているが、2段タンク型モデルによる結果は、流出ピーク値を良く再現する結果となった。

また、1段タンク型モデルと2段タンク型モデルの比較を流出ピーク値の相対誤差について行った結果(図-11)、2段タンク型モデルによりピーク流出高の再現精度の向上が認められた。

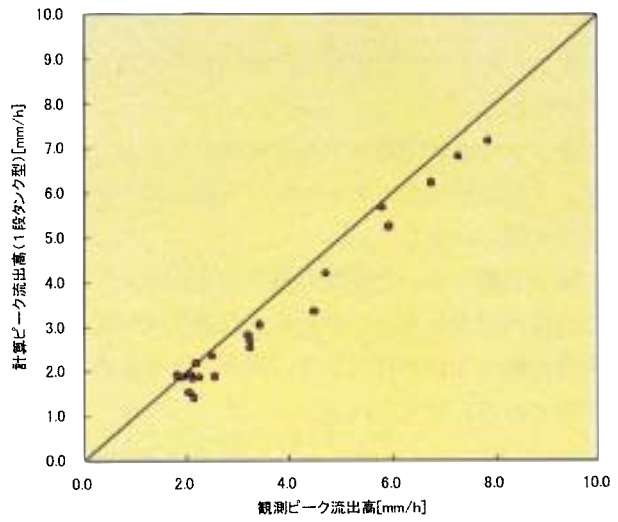


図-9 1段タンク型モデルによる再現結果

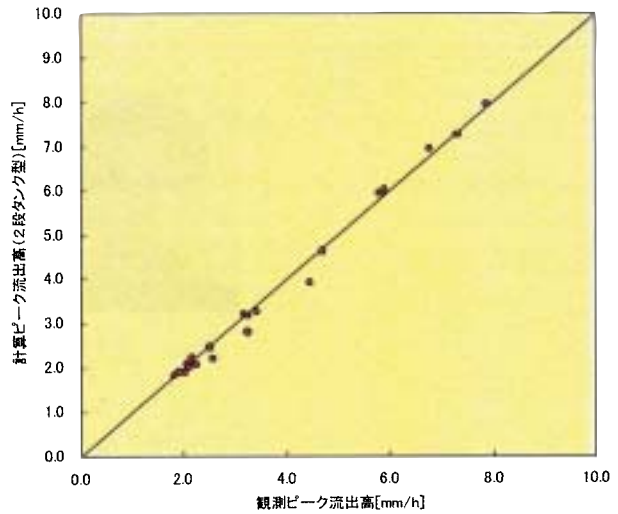


図-10 2段タンク型モデルによる再現結果

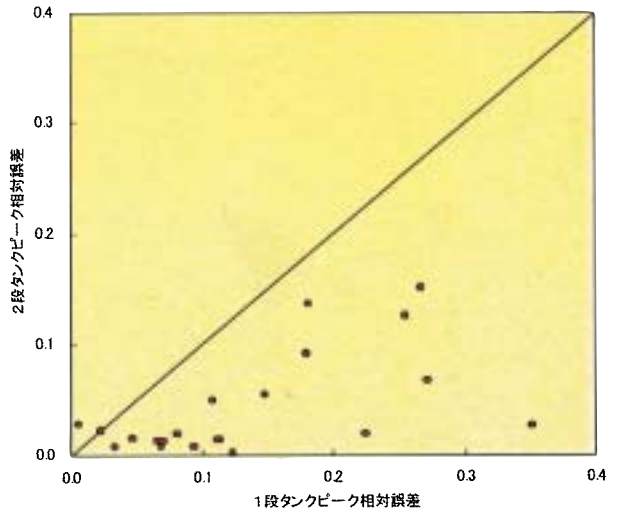


図-11 流出モデルの再現精度の比較

9. まとめ

a) 標津川のように浸透が大きいと推定される流域において良好な再現性が得られたことから、2段目のタ

ンクにより地下水流出成分が的確に表現されていると考えられる。

- b) 2段タンク型貯留関数モデルを採用したことで、1段タンク型貯留関数モデルに比べて流出ピーク値の再現が大幅に向上した。
- c) 流出成分分離で用いた定数を地下水流出成分の再計算に直接利用できる。このため、最適化すべきモデル定数の数は3個だけであり、提案した手法は実用上有効であると考えられる。

**謝辞：**本研究で用いたデータは、国土交通省北海道開発局より提供していただいた。ここに記して謝意を表する。

#### 参考文献

- 1) (財)北海道河川防災研究センター・研究所 編集・発行：一般化貯留関数法による流域流出解析・河道洪水追跡実用計算法, 152p., 2001.
- 2) 日野幹雄・長谷部正彦：水文流出解析, 森北出版, 254p., 1985.
- 3) 佐藤力信・嵯峨 浩・馬場仁志・星 清：損失項を含む貯留関数法を応用したタンクモデルの提案, 土木学会 北海道支部論文報告集, 第55号(B), 32-33p., 1999.



園山 裕士\*

北海道開発土木研究所  
環境水工部  
河川研究室  
研究員



星 清\*\*

(財)北海道河川防災研究センター  
研究所長  
(元開発土木研究所所長)  
工学博士